

11. WYBRANE CHARAKTERYSTYKI UKŁADÓW DRGAJĄCYCH*

11.1. WSTĘP

W obecnych czasach trudno sobie wyobrazić taką dziedzinę techniki, która nie byłaby w większym lub mniejszym stopniu związana z procesami drgań. Wystarczy pomyśleć, że wszelkie zjawiska dźwiękowe, świetlne, cieplne, elektryczne posiadają charakter falowy. Przykładem takich drgań są klucze grające na blacie stołu przy zbyt głośnej muzyce jak i trzęsienia ziemi, czy fale morskie. Z powodu wszechobecności drgań ludzie już od dawna się nimi zajmują. Pierwszym z wielkich uczonych, który zainteresował się drganiami był Galileusz, który znudzony uroczystością kościelną zaczął obserwować huśtające się lampy [1]. Kilka dziesiąt lat później Newton wydał dzieło, które nie miało sobie równego - *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Dało ono podwaliny do rozwoju wielu dziedzin naukowych, a wśród nich właśnie do analizy drgań. Zdefiniujmy więc co będziemy rozumieli przez drgania.

Jest to taki proces, w którym jakakolwiek wielkość fizyczna charakteryzująca ten proces doznaje kolejno wzrostu i obniżania swej wartości w funkcji pewnej innej wielkości, którą zazwyczaj jest czas [2].

11.2. WPŁYW DRGAŃ NA ŻYCIE

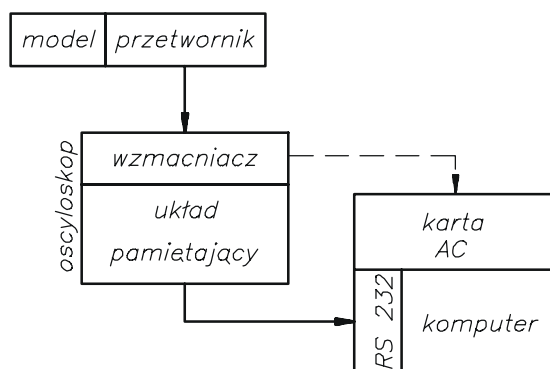
Spośród wielu procesów o charakterze drgającym, drgania układów mechanicznych są najbardziej zauważalne i odczuwalne w życiu codziennym. Mogą one być przydatne w życiu. Obecnie rozwija się nawet specjalna technika zwana techniką wibracyjną. Zajmuje się ona produkcją urządzeń dla wielu gałęzi przemysłu. W odlewnictwie stosuje się wibrujące platformy (jeśli kładz z roztopionym metalem postawimy na platformie to drgania kładzi sprzyjają wydzielaniu gazu i oddzieleniu żużli). W transporcie znane są od dawna przenośniki wibracyjne. W budownictwie stosowane są urządzenia wykorzystujące drgania do zagęszczania, mieszania, formowania i wybijania mas formierskich, wbijania pali, mielenia czy ubijania. Najpopularniejszym obecnie przyrządem wykorzystującym opisywane zjawisko jest młot pneumatyczny oraz jego liczne hybrydy jak przecinaki, nitowniki, kilofy. W budowie maszyn drgania wykorzystywane są w urządzeniach do polerowania (szlifiarka oscylacyjna) i docierania. W naszym laboratorium spotkaliśmy się już z drganiami. Służyły one do zainicjowania w próbkach pęknięcia zmęczeniowego. Innym przykładem zastosowania drgań mechanicznych jest metoda

* Opracował: Jarosław Gałkiewicz

wyznaczania momentu bezwładności metodą wahadła trójnirkowego, jak też badania zdolności tłumienia drgań. Oczywiście drgania nie przynoszą samych korzyści. Statystyka wykazuje, że około 70-80% pęknięć i awarii w maszynach jest wynikiem właśnie drgań [2]. Straty szacowane są w milionach dolarów rocznie, a co jakiś czas gdzieś na świecie pojawia się trzęsienie ziemi - spektakularny przykład katastrofalnego wpływu drgań, które oprócz strat materialnych pochłania tysiące istnień ludzkich.

11.3. OGÓLNE METODY POMIARU DRGAŃ

W tym rozdziale przedstawimy schemat sposobu pomiaru drgań wykorzystywany w laboratorium. Podstawowym elementem jest model, który będziemy badać. Model ten musi zawierać przetwornik, który zamieni drgania układu na sygnały elektryczne. Sygnały te z kolei muszą być wzmacnione do odpowiedniego poziomu i zapamiętane. Te dwie funkcje w naszym układzie spełnia oscyloskop. Jest to bardzo korzystne rozwiązanie, gdyż umożliwia zapamiętanie szybkozmiennych w czasie sygnałów. Dla wolniejszych przebiegów zamiast oscyloskopu wykorzystujemy kartę AC i komputer. Sygnał z oscyloskopu przesyłany jest do komputera za pomocą portu szeregowego RS232 i programu sterującego połączeniem oscyloskop-komputer.



Rys. 11.1. Schemat układu pomiarowego

Pomiar drgań przeprowadza się w dwóch etapach. Pierwsza część, to analiza geometryczna polegająca na wyznaczeniu postaci drgań ich charakteru, punktów, które przy danej postaci nie biorą udziału w drganiach oraz tych o największej amplitudzie drgań. W drugiej fazie przeprowadza się analizę czasową, tzn. bada się zmienność poszczególnych wielkości (przemieszczenia liniowego i kąowego, odkształcenia wzdłużnego i poprzecznego) w czasie oraz ich pierwszych i drugich pochodnych.

Jeśli zmiany są okresowe, to należy wyznaczyć parametry tych zmian (np.: częstość, współczynnik tłumienia), zaś w przypadku przebiegu nieustalonego należy opisać je statystycznie.

11.4. PRZETWORNIKI DRGAŃ MECHANICZNYCH

11.4.1. Właściwości przetworników mechaniczno-elektrycznych

Czujnik umożliwiający zamianę sygnału mechanicznego (np. przemieszczenia) na sygnał elektryczny (np. napięcie) jest najważniejszym elementem całego układu. Od jego właściwości zależy wynik pomiarów. Zależnie od zjawiska wykorzystywanego w procesie przetwarzania sygnałów można przetworniki można podzielić na kilka grup (Tabela 11.1.)

Tabela 11.1

Podział przetworników mechaniczno-elektrycznych

Generujące	Parametryczne
• Indukcyjne: ◊ Elektrodynamiczne ◊ Elektromagnetyczne • Piezoelektryczne • Fotoelektryczne zaworowe • Elektrolityczne • Elektrokinetyczne	• Indukcyjne ◊ Dławikowe ◊ Transformatorowe • Pojemnościowe • Fotoelektryczne z efektem zewn. i wewn. • Oporowe ◊ Potencjometryczne ◊ Oporowo-węglowe ◊ Tensometryczne • Elektronowe • Akustyczne • Ultradźwiękowe • Magnetosprężyste

Przetworniki mechaniczno-elektryczne cyfrowe mają przewagę nad przetwornikami nieelektrycznymi dzięki wielu zaletom, do których zaliczamy:

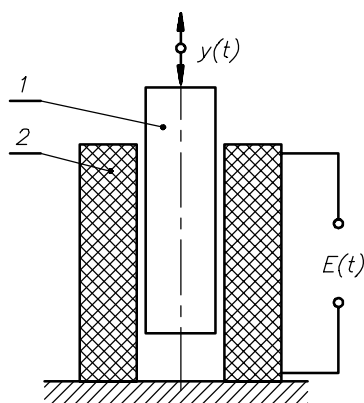
- wysoka jakość zapisu (sygnał nie jest zakłócony przez urządzenie zapamiętująco-rejestrujące, którym w przypadku przetworników mechanicznych analogowych jest pisak),
- możliwość wzmacniania i przekształcania sygnału,
- zwartość budowy i mały ciężar (jest to bardzo ważne, gdyż zapobiega to powstawaniu dodatkowych znaczących co do wartości sił bezwładności),

- możliwość działania na odległość (przetwornik jest oddzielony od pozostałych elementów układu pomiarowego i może być sterowany poprzez przewody lub drogą radiową),
- możliwość jednoczesnej rejestracji sygnałów z kilku czujników,
- wysoka niezawodność,
- łatwy montaż i obsługa.

Powyższe zalety spowodowały wyparcie wszelkich przyrządów zarówno mechanicznych jak i optycznych, choć te ostatnie dzięki rozwojowi techniki są często wykorzystywane w technice laboratoryjnej.

11.4.2. Zasada działania wybranych przetworników

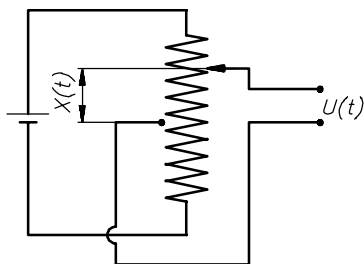
Na rysunku 11.2 przedstawiono zasadę działania jednego z popularniejszych, przetwornika indukcyjnego czynnego (w czasie pracy wytwarza sygnał - zmienną w czasie siłę elektromotoryczną). Magnes trwały **1**, poruszając się wewnątrz nieruchomej cewki **2**, indukuje w obwodzie cewki napięcie zmienne, którego znak zależy od kierunku ruchu rdzenia, a wartość od położenia rdzenia względem cewki. W pewnych sytuacjach zamiast rdzenia porusza się cewka. Podobną budowę i sposób działania ma czujnik bierny, ale tu rdzeń jest po prostu przewodnikiem elektryczności (np. żelazo), a układ wymaga źródła zasilania. Położenie rdzenia wpływa na wartość indukcyjności, a przez to na wartość napięcia wyjściowego czujnika.



Rys. 11.2. Schemat prostego przetwornika elektrodynamicznego

Innym prostym i niezawodnym w działaniu typem przetworników są czujniki potencjometryczne należące do grupy oporowych. Nadają się one do pomiaru amplitudy drgań rzędu 1cm i częstotliwości do 10 Hz. Podstawowym elementem

układu jest element oporowy z suwakiem. Od położenia suwaka na elemencie oporowym zależy wartość napięcia odbieranego przez dalszą część układu (rys. 11.3).



Rys. 11.3. Schemat czujnika potencjometrycznego dwustronnego

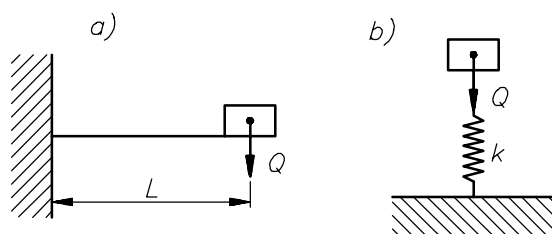
Do grupy przetworników oporowych należą również tensometry, które zaprezentowano w ćwiczeniu 4.

11.5. PODSTAWY FIZYCZNE PROCESU DRGAŃ

Przeprowadzenie każdego doświadczenia poprzedzone jest obowiązkowo szczegółową analizą badanego zjawiska, która prowadzi do budowy modelu matematycznego opisującego go. Umożliwia to zrozumienie zjawiska i późniejszą interpretację wyników.

11.5.1. Drgania swobodne belki

Podczas budowy modelu pierwszym krokiem jest zebranie danych o zjawisku fizycznym. W naszym przypadku mamy do czynienia z belką utwierdzoną w jednym końcu i obciążoną masą na drugim końcu [rys. 11.4a]. Belkę wykonano ze stali dla której moduł Younga wynosi $E=2,15 \cdot 10^5 \text{ MPa}$. Posiada ona długość L , szerokość b oraz wysokość h .



Rys. 11.4. Belka z obciążeniem (a) i jej model (b)

W drugim etapie wprowadzamy uproszczenia modelu. To, jak wiele i jakiej kategorii będą te uproszczenia zależy od tego, jak dokładnie chcemy opisać badane zjawisko. W naszym układzie wstępnie przyjmujemy, że belka jest nieważka (nie ma ciężaru) oraz pominiemy tłumienie. Aby wyznaczyć równanie ruchu masy, rzeczywisty układ zastąpimy równoważnym składającym się z masy zawieszanej na sprężynie o sztywności k .

Z wytrzymałości materiałów wiadomo, że strzałkę belki można wyznaczyć ze wzoru:

$$f = \frac{QL^3}{3EI} \quad (11.1)$$

Sztywność sprężyny zastępczej możemy wyznaczyć wykorzystując równanie:

$$k = \frac{Q}{f} \quad (11.2)$$

tak więc

$$k = \frac{3EI}{L^3} \quad (11.3)$$

Równanie opisujące ruch masy wygląda następująco:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (11.4)$$

Wprowadzając do równania (11.4) wynik (11.3) i dzieląc przez masę otrzymujemy:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (11.5)$$

gdzie:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3EI}{mL^3}} \quad (11.6)$$

jest częstością drgań nietłumionych. Na podstawie tej wielkości możemy określić okres drgań układu bez tłumienia T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (11.7)$$

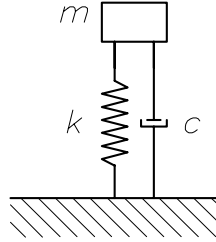
Rozwiązaniem równania (11.5) jest zależność:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad (11.8)$$

$$C_1 = x_0 \quad (11.9)$$

$$C_2 = \frac{V_0}{\omega_0} \quad (11.10)$$

gdzie: x_0 i V_0 to odpowiednio położenie i prędkość dla czasu $t=0$.



Rys. 11.5. Schemat układu z tłumieniem

Równanie (11.4) jest dla nas zbyt uproszczone. Wykonane doświadczenie wykazałoby, że drgania są wytłumiane. Uwzględnimy więc tłumienie w układzie (rys.11.5). Tłumienie nie jest już taką prostą wielkością do zidentyfikowania. Zależy ono od wielu czynników, jak: własności medium w którym porusza się badany obiekt, kształt badanego obiektu, siły tarcia zarówno tego zewnętrznego (wynikającego z kontaktu z innymi przedmiotami) jak i wewnętrznego (wynikającego z ruchu cząsteczek materiału względem siebie). Równanie z uwzględnioną siłą oporu wygląda następująco:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (11.11)$$

po podzieleniu przez masę możemy zapisać:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (11.12)$$

gdzie przyjęto oznaczenia:

$$2h = \frac{c}{m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Postulujemy rozwiązanie równania (11.12) w postaci:

$$x(t) = \xi(t)e^{-ht} \quad (11.13)$$

wówczas:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dot{\xi}e^{-ht} - \xi he^{-ht} \\ \ddot{x}(t) = \ddot{\xi}e^{-ht} - 2\dot{\xi}he^{-ht} + h^2\xi e^{-ht} \end{cases} \quad (11.14)$$

Uwzględniając równania (11.13) i (11.14) w równaniu (11.12) otrzymujemy:

$$\ddot{\xi}(t) + (\omega_0^2 - h^2)\xi(t) = 0 \quad (11.15)$$

Jeżeli $\omega_0^2 > h^2 \Rightarrow \omega_0^2 - h^2 = \omega_*^2 > 0$ to mamy do czynienia z tłumieniem podkrytycznym (słabym). Wówczas równanie (11.15) możemy zapisać w postaci:

$$\ddot{\xi}(t) + \omega_*^2 \xi(t) = 0 \quad (11.16)$$

a więc rozwiązaniem tego równania podobnie jak równania (11.5) będzie:

$$\xi(t) = C_1 \cos(\omega_* t) + C_2 \sin(\omega_* t) \quad (11.17)$$

Zależność (11.13) ma więc postać:

$$x(t) = (C_1 \cos(\omega_* t) + C_2 \sin(\omega_* t))e^{-ht} \quad (11.18)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} C_0 &= x_0 \\ C_2 &= \frac{V_0 + hx_0}{\omega_*} \end{aligned} \quad (11.19)$$

Przebieg $x(t)$ można zapisać w innej postaci:

$$x(t) = A(t) \sin(\omega_* t + \beta) \quad (11.20)$$

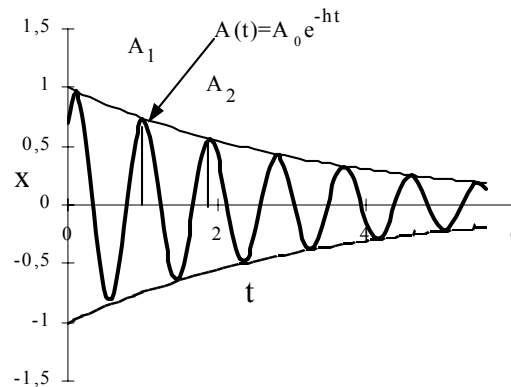
Zmienną w czasie amplitudę możemy wyznaczyć z równania:

$$A(t) = \underbrace{x_0^2 + \left(\frac{V_0 + hx_0}{\omega_*} \right)^2}_{A_0} e^{-ht} \quad (11.21)$$

zaś kąt przesunięcia fazowego z równania:

$$\tan \beta = \frac{x_0 \omega_*}{V_0 + h x_0} \quad (11.22)$$

Przykład przebiegu o takim charakterze tłumienia pokazuje rysunek 11.6:



Rys. 11.6. Przykład przebiegu ze słabym tłumieniem

Miarą tłumienia w układzie może być iloraz dwóch amplitud A_1 i A_2 odległych od siebie o jeden okres.

$$\Delta = \frac{A_1}{A_2} = \frac{Ae^{-ht}}{Ae^{-h(t+T_*)}} = e^{hT_*} \quad (11.23)$$

gdzie:

$$T_* = \frac{2\pi}{\omega_*} \quad \text{to okres drgań swobodnych, tłumionych.}$$

Jeżeli zlogarytmujemy równanie (11.23) to otrzymamy logarytmiczny dekrement tłumienia:

$$\delta = hT_* \quad (11.24)$$

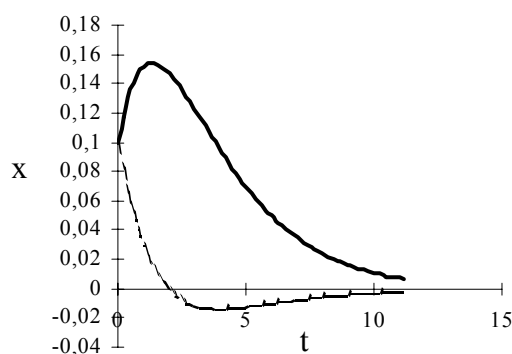
Powróćmy do równania (11.12). Jeśli zachodzi równość:

$$\omega_0^2 = h^2 \quad (11.25)$$

to mamy do czynienia z tłumieniem krytycznym. Rozwiązanie w tym przypadku wygląda następująco:

$$x(t) = e^{-ht} \left[x_0 + (hx_0 + V_0)t \right] \quad (11.26)$$

Graficznie równanie (11.26) przedstawia rysunek 11.7.



Rys. 11.7. Przykłady przebiegów z tłumieniem krytycznym

Jak widać w pewnych warunkach przemieszczenia mogą zmienić znak. Nie jest to możliwe przy silnym (nadkrytycznym) tłumieniu. Mamy z nim do czynienia, gdy:

$$\omega_0^2 < h^2 \quad (11.27)$$

Wówczas możemy otrzymać równania (11.28) do (11.30)

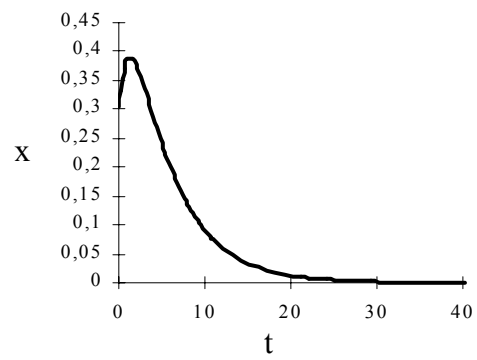
$$x(t) = A_0 e^{-ht} \sinh(\alpha t + \beta_1) \quad (11.28)$$

gdzie:

$$A_0 = \sqrt{\left(\frac{hx_0 + V_0}{\alpha} \right)^2 - \alpha^2} \quad (11.29)$$

$$\tanh(\beta_1) = \frac{\alpha x_0}{hx_0 + V_0} \quad (11.30)$$

W tym przypadku przemieszczenia mają przebieg jak na rysunku 11.8.



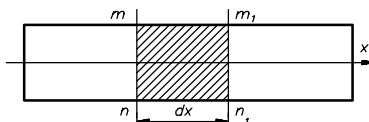
Rys. 11.8. Drgania nadkrytyczne

11.6. FALE SPRĘŻYSTE W MATERIALE

11.6.1. Fale podłużne

Nieodłącznym aspektem dynamicznego obciążania ciał sprężystych są zjawiska falowe. Fale te są niewidoczne gołym okiem i potrafią mieć trudny do przewidzenia wpływ na konstrukcję. Nałożenie się na siebie w pewnych warunkach dwóch lub więcej fal może wywołać naprężenia przekraczające wytrzymałość materiału i doprowadzić do zniszczenia elementu mimo, iż w przypadku statycznego obciążania mógłby on być obciążony znacznie większymi wartościami.

Dokonajmy prostej analizy rozchodzenia się fal, wykorzystując jako model jednoosiowy pręt o stałym przekroju (rys.11.9). Zakładamy, że po odkształceniu przekroje poprzeczne pozostają płaskie.



Rys. 11.9. Element dx belki

Odształcenie obliczamy z prostej i dobrze znanej zależności:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (11.31)$$

gdzie u to przemieszczenie całego przekroju w kierunku osi x .

Jeżeli przez A oznaczymy pole przekroju poprzecznego to siła rozciągająca odpowiadająca wydłużeniu opisanemu równaniem (11.31) wynosi:

$$P = AE \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (11.32)$$

Rozpatrzmy równowagę elementu dx na rysunku 11.9:

$$AE \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) - AE \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad (11.33)$$

Równanie ruchu dla elementu dx będzie miało postać ($\mathbf{ma}=\mathbf{P}$):

$$A\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad (11.34)$$

ρ jest gęstością materiału.

Po uproszczeniu równanie (11.34) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (11.35)$$

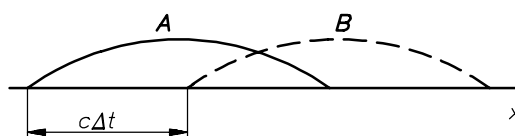
Nowy symbol c , który się pojawił się w równaniu to prędkość rozchodzenia się fal podłużnych w materiale. Wielkość ta zależy jedynie od stałych materiałowych i opisuje ją zależność:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (11.36)$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (11.35) można zapisać w postaci:

$$u = f(x + ct) + f_1(x - ct) \quad (11.37)$$

Spróbujmy zinterpretować co przedstawia powyższe równanie. Rozpatrzmy znaczenie drugiego członu po prawej stronie równania (11.37). Dla ustalonej chwili czasu t wyraz ten jest wyłącznie funkcją współrzędnej x i można go przedstawić za pomocą krzywej **A** na rysunku 11.10 (kształt krzywej zależy od funkcji f_1).

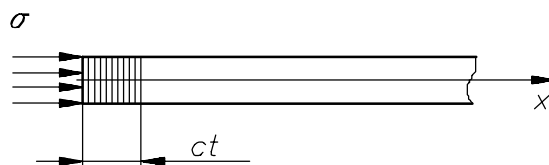


Rys. 11.10. Przemieszczanie fali

Po upływie pewnego czasu Δt funkcja f_1 pozostanie niezmieniona tylko wtedy, gdy druga zmienna wzrośnie o wartość $\Delta x = c\Delta t$. Oznacza to, że funkcja zbudowana dla chwili t może być po przesunięciu w kierunku osi x o wielkość $c\Delta t$ użyta dla chwili $t + \Delta t$ (krzywa B na rysunku 11.10). Poddając analizie drugi człon równania (11.37), dojdziemy do wniosku, że przedstawia on falę poruszającą się w kierunku przeciwnym. Tak więc równanie (11.37) przedstawia dwie fale poruszające się w dwóch przeciwnych kierunkach. Funkcje f i f_1 należy wyznaczać z warunków początkowych ($t=0$):

$$\begin{cases} (u)_{t=0} = f(x) + f_1(x) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = c[f'(x) - f_1'(x)] \end{cases} \quad (11.38)$$

Prędkość rozchodzenia się fal można uzyskać z prostych rozważań. Przypuśćmy, że do lewego końca belki przyłożono w nagły sposób równomiernie rozłożone naprężenie ściskające (rysunek 11.11).



Rys. 11.11. Strefa ściskania powstała pod wpływem uderzenia

Oprócz prędkości rozchodzenia się fal w materiale, należy rozróżnić prędkość poruszania się cząsteczek v w strefie ściskanej (podobnie rozciąganej), wynikającą z działania sił obciążających. Prędkość tę można znaleźć biorąc pod uwagę, że strefa ściskania skraca się pod wpływem naprężeń ściskających σ (rys. 11.11) o wielkość:

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} ct \quad (11.39)$$

gdyż:

$$\Delta l = \epsilon l, \text{ a } ct = l \text{ i } \frac{\sigma}{E} = \epsilon$$

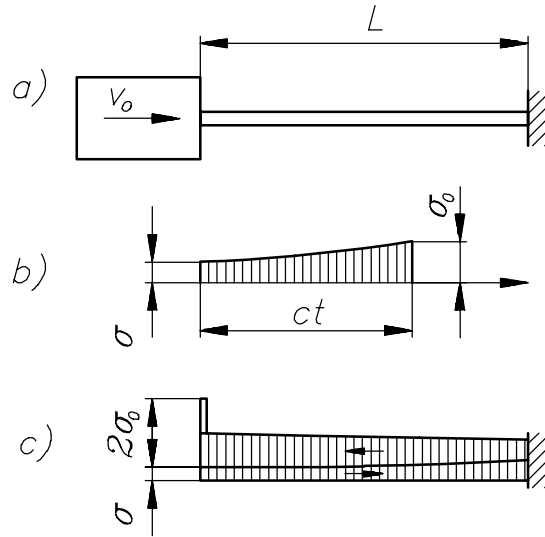
Stąd prędkość ściskanego końca wynosi:

$$v = \frac{\sigma}{E} c \quad (11.40)$$

Jak widać prędkość ta zależy od wartości naprężeń. Kierunek ruchu cząsteczek w materiale nie zawsze jest zgodny z kierunkiem rozchodzącej się strefy (fali) rozciągania/ściskania. Rozważmy to wykorzystując rysunek 11.11. W przypadku impulsu wywołującego naprężenia ściskające ruch cząsteczek w materiale jest zgodny z kierunkiem fali, natomiast w przypadku rozciągania materiał w stresie rozciągania będzie poruszał się w lewo podczas, gdy fala będzie się przesuwać w głąb belki, czyli w prawo.

11.6.2. Podłużne zderzenie prętów

W rozdziale tym rozważymy zagadnienie uderzenia pręta utwierdzonego jednostronnie przez poruszającą się z prędkością V_0 masę M (przyjmujemy, że jest to masa przypadająca na jednostkę przekroju poprzecznego pręta).



Rys. 11.12. Rozkład naprężeń w uderzonym pręcie w różnych momentach czasu

W chwili uderzenia ($t=0$) prędkość cząsteczek na końcu pręta jest równa prędkości ciała (a więc V_0). Podstawiając równanie (11.36) do (11.40) otrzymujemy wielkość początkowych naprężeń ściskających:

$$\sigma_0 = V_0 \sqrt{E\rho} \quad (11.41)$$

Ze względu na opór stawiany przez pręt, prędkość i naprężenia wywołane przez masę M w pręcie będą się stopniowo zmniejszać i powstanie przy tym fala ściskania o malejącej amplitudzie naprężeń przesuwająca się wzdłuż pręta (rys. 11.12b). Zmianę naprężenia w czasie łatwo można znaleźć z równania ruchu ciała. Oznaczając przez σ zmienne naprężenia ściskające na końcu pręta, a przez V zmienną prędkość ciała, otrzymamy:

$$M \frac{dV}{dt} + \sigma = 0 \quad (11.42)$$

lub wykorzystując równania (11.36) i (11.40) w (11.42):

$$\frac{M}{\sqrt{E\rho}} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = 0 \quad (11.43)$$

stąd:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{t\sqrt{E\rho}}{M}} \quad (11.44)$$

Równanie (11.44) można stosować dla $t < 2l/c$. Ponieważ, gdy $t = 2l/c$ fala ściskania wraca z powrotem do końca pręta stykającego się z poruszającym się ciałem, przy czym na czole fali panuje ciśnienie σ_0 . Ponieważ prędkość ciała nie może zmienić się w sposób nagły, to fala odbije się jak od końca utwierdzonego i naprężenie ściskające na powierzchni styku wzrośnie raptownie o $2\sigma_0$ (Rys.11.12c). Tego rodzaju wzrost ciśnienia podczas zderzenia powtarza się w odstępach czasu $T = 2l/c$ i stąd dla każdego przedziału czasowego musimy układać osobną zależność dla σ . W pierwszym przedziale obowiązuje tylko równanie (11.44), ale już w drugim $T < t < 2T$ naprężenie ściskające jest wynikiem nałożenia się dwóch fal poruszających w kierunku od uderzonego końca i jednej fali „powracającej”. Oznaczmy przez $s_1(t)$, $s_2(t)$... całkowite naprężenie ściskające, jakie na uderzonym końcu pręta wywołują wszystkie fale posuwające się w kierunku utwierdzenia po okresach T , $2T$, ... Fale powracające od punktu zamocowania zostały wysłane w poprzednim przedziale czasowym (wcześniej o T). Dlatego ciśnienie, wywołane przez nie na końcu pręta, uzyskamy podstawiając w wyrażeniu na ciśnienie, wywołane w poprzednim przedziale czasowym $(t-T)$ zamiast t . Ogólnie wyrażenie dla całkowitego naprężenia ściskającego w obrębie przedziału czasowego $nT < t < (n+1)T$ ma więc postać:

$$\sigma = s_n(t) + s_{n-1}(t-T) \quad (11.45)$$

Prędkość cząsteczek uderzonego końca jest różnicą prędkości fali oddalającej się, odpowiadającej ciśnieniu $s_n(t)$ oraz prędkości fali zbliżającej się do tego końca, odpowiadającej ciśnieniu $s_{n-1}(t-T)$. Wykorzystując wyrażenie (11.41) otrzymamy więc:

$$V = \frac{1}{\sqrt{E\rho}} [s_n(t) - s_{n-1}(t-T)] \quad (11.46)$$

Związek między $s_n(t)$ oraz $s_{n-1}(t-T)$ otrzymamy posługując się równaniem ruchu (11.42) ciała uderzanego [3]. Po obliczeniach otrzymamy:

$$s_n(t) = s_{n-1}(t-T) - \frac{4\alpha}{T} e^{\frac{2\alpha t}{T}} \left[\int e^{\frac{2\alpha t}{T}} s_{n-1}(t-T) dt + C \right] \quad (11.47)$$

gdzie C jest stałą całkowania.

11.7. PRZEBIEG ĆWICZENIA

11.7.1. Ćwiczenie 1

W pierwszym ćwiczeniu za pomocą oscyloskopu zapamiętamy przebieg odkształcenia w wybranym punkcie belki obciążonej masą podczas drgań swobodnych i dokonamy identyfikacji parametrów ruchu tej belki. Elementem przetwarzającym drgania na sygnały elektryczne będzie w tym wypadku mostek tensometryczny.

Przebieg tego ćwiczenia będzie następujący:

- dokonać kalibracji mostka (lub zapisać funkcję kalibrującą jeśli jest już znana),
- zmierzyć wszelkie niezbędne wielkości (wymiały belki: długość L , szerokość b i wysokość h , masę zawieszonego ciężarka m , materiał belki),
- wyznaczyć teoretyczną wartość częstości drgań własnych nietłumionych (równanie 11.6),
- wyznaczyć wszystkie niewiadome równania (11.18),
- wyznaczyć wartość logarytmicznego dekrementu tłumienia,
- zmienić masę obciążającą belkę lub jej położenie na belce, ponownie wyznaczyć teoretyczną częstość drgań własnych w ruchu nie tłumionym a następnie porównać zarejestrowany przebieg drgań z przebiegiem teoretycznym (równanie 11.18), w którym należy zastosować parametry charakteryzujące tłumienie wyznaczone z poprzedniej próby.

11.7.2. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać:

- schemat wykorzystanego podczas ćwiczenia układu,
- parametry geometryczne układu,
- niezbędne obliczenia,
- umieścić na jednym wykresie rzeczywisty i teoretyczny przebieg drgań (dla każdej z prób oddzielnie),
- we wnioskach opisać różnice między przebiegami rzeczywistymi i teoretycznymi i zaproponować wyjaśnienie tych różnic.

11.7.3. Ćwiczenie 2

W tym ćwiczeniu spróbujemy wyznaczyć prędkość rozchodzenia się fal w stalowym pręcie przy wykorzystaniu młota spadowego.

Przebieg ćwiczenia:

- skalibrować tensometryczny czujnik odkształceń,
- dokonać pomiaru :
 - ⇒ masy pręta i bijaka,
 - ⇒ długości wysokości i szerokości pręta,
 - ⇒ rozstawu tensometrów,
- dla ustawionej wysokości opadania bijaka wyznaczyć prędkość bijaka dla momentu uderzenia,

- uruchomić aparaturę pomiarową i przygotować do rejestracji,
- dokonać uderzenia i zachować wyniki pomiarów,
- wyznaczyć maksymalne wartości naprężeń w kierunku wzdłużnym i poprzecznym,
- na podstawie wskazań tensometrów ułożonych w kierunku wzdłużnym obliczyć prędkość fali podłużnej i porównać z teoretyczną (równanie (11.36)),
- na podstawie kalibracji wyznaczyć największą wartość naprężeń ściskających wskazywaną podczas próby przez tensometry oraz porównać ją z naprężeniami wynikającymi z ciężaru bijaka.

11.7.4. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać:

- schemat wykorzystanego podczas ćwiczenia układu,
- parametry układu (wymiary geometryczne) i próby (wysokość opadania bijaka, ciężar bijaka, prędkość w momencie uderzenia),
- niezbędne obliczenia,
- wykres na którym przedstawione będą przebiegi czasowe sygnałów uzyskanych z tensometrów,
- we wnioskach napisać skąd wynikają różnice między teoretyczną a rzeczywistą prędkością fali poprzecznej.

11.8. Zagadnienia kontrolne

- zalety przetworników elektryczno-mechanicznych,
- budowa i sposób działania najpopularniejszych przetworników,
- parametry opisujące ruch drgający,
- zinterpretować równanie (11.37).

Literatura

1. STEWARD I.: Czy Bóg gra w kości – Nowa matematyka chaosu. Warszawa: PWN 1994 s. 36
2. OSIECKI J., ZIEMBA S.: Podstawy pomiarów drgań mechanicznych. Warszawa: PWN 1968
3. TIMOSHENKO S., GOODIER J.N.: Teoria sprężystości. Kraków: Arkady 1962 s.376-386