

Wielościany

Definicja 1: Wielościanem nazywamy zbiór skończonej ilości wielokątów płaskich spełniających następujące warunki:

1. każde dwa wielokąty mają bok lub wierzchołek wspólny albo nie mają żadnego punktu wspólnego
2. każdy bok wielokąta jest bokiem wspólnym tylko dla dwóch wielokątów
3. każdy wierzchołek wielokąta jest wspólnym wierzchołkiem dla co najmniej trzech wielokątów

Wielokąty te nazywamy ścianami wieloboku, ich boki nazywamy krawędziami, a ich wierzchołki narożnikami bądź wierzchołkami.

Definicja 2: wielościanem wypukłym (wkłęsłym) nazywamy wielościan, który leży (nie leży) całkowicie po jednej stronie każdej ze ścian.

Definicja 3: Wielościan składający się z jednakowych (przystających) wielokątów foremnych w których sąsiednie pary ścian tworzą równe kąty dwuścienne nazywamy wielościanem foremnym.

Tabela: Wielościany foremne

Liczba ścian	ilość wierzchołków	ilość krawędzi	ilość wielokątów w wierzchołku	kształt ściany	przypisany żywioł
6	8	12	3	kwadrat	ziemia
4	4	6	3	trójkąt równoboczny	ogień
8	6	12	4	trójkąt równoboczny	powietrze
20	12	30	5	trójkąt równoboczny	woda
12	20	30	3	pięciobok	-----

Wielościan zbudowany z różnych wielokątów foremnych to wielościan półforemny. Takim wielościanem da się opisać kulę, ale nie da się wpisać.

Wielościan składający się z n trójkątów o wspólnym wierzchołku i n -kąta w podstawie nazywamy ostrosłupem.

Jeżeli środek wysokości ostrosłupa jest środkiem koła opisanego na podstawie to ostrosłup nazywamy ostrosłupem prostym (wszystkie krawędzie boczne są równe)

Jeżeli ponad to podstawa ostrosłupa jest wielokątem foremnym to ostrosłup prosty nazywamy prawidłowym (wszystkie ściany boczne są trójkątami równoramiennymi)

Wielościan składający się z n równoległoboków oraz dwóch n -kątów o bokach parami równoległych nazywamy graniastosłupem.

Jeżeli wszystkie ściany boczne są prostokątami to graniastosłup nazywamy graniastosłupem prostym.

Jeżeli ponad to dwa n -kąty są wielokątami foremnymi to graniastosłup nazywamy prawidłowym.

Graniastosłup, którego wszystkie ściany są równoległobokami nazywamy równoległościanem.

Graniastosłup, którego wszystkie ściany są prostokątami nazywamy prostopadłościanem.

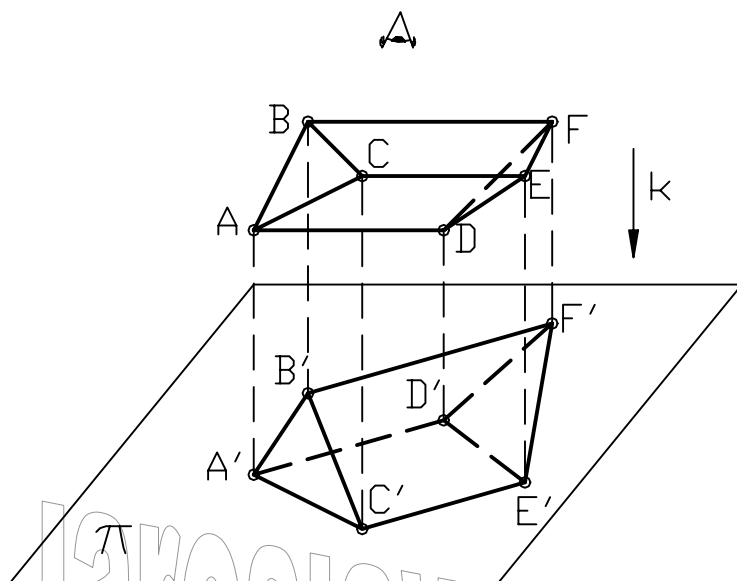
Graniastosłup, którego wszystkie ściany są kwadratami nazywamy sześciannem.

Rzuty wielościanu

Rzut wielościanu jest zbiorem rzutów jego wierzchołków, krawędzi i ścian.

Konturem wielościanu nazywamy wielokąt płaski bądź przestrzenny będący zbiorem punktów dzielących wielościan na punkty widoczne i niewidoczne.

Zarysem wielościanu (linią brzegową rzutu) nazywamy rzut konturu wielościanu (zbiór punktów $X_j^1 = x_j \cap \pi_i$). Zarys wielościanu jest zawsze wielokątem płaskim.



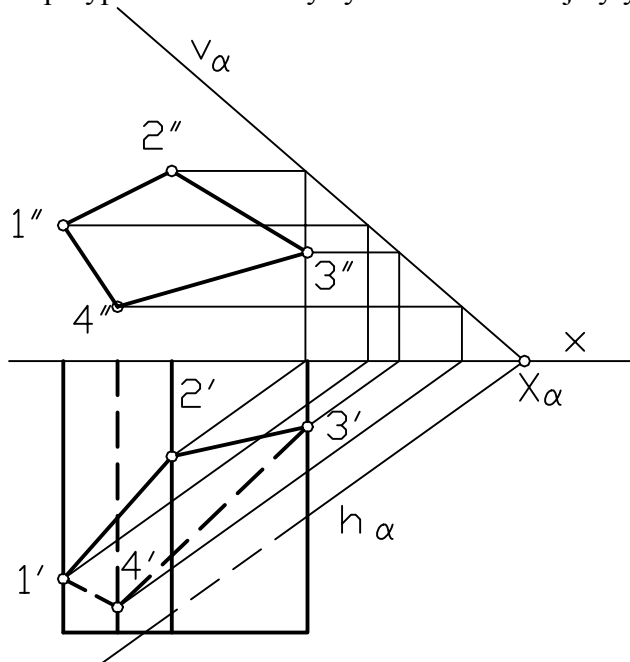
Przekroje wielościanów

Płaskim przekrojem wielościanu nazywamy zbiór punktów leżących równocześnie na płaszczyźnie siecznej i ścianach wielościanu.

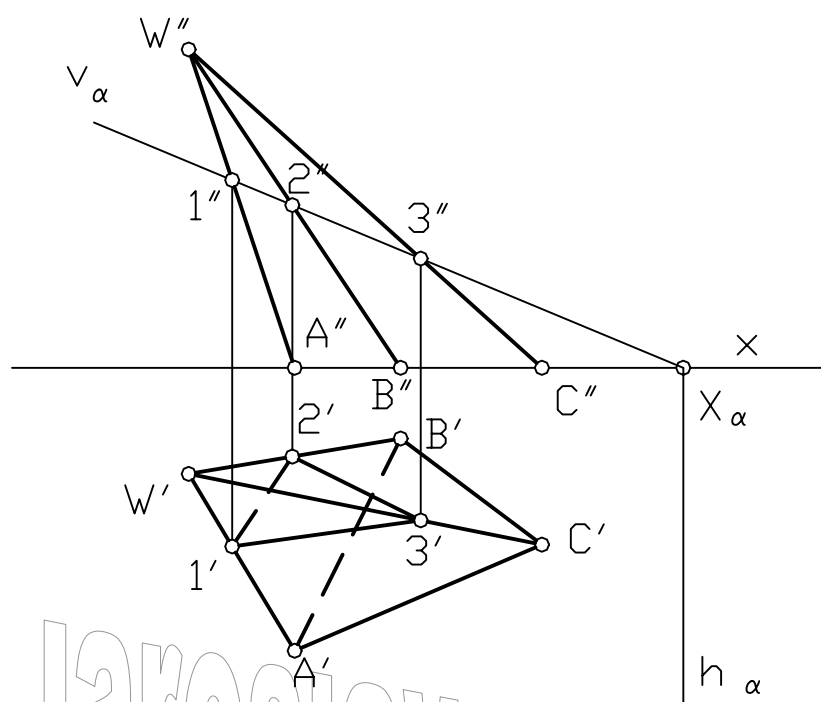
Płaskim przekrojem wielościanu jest wielokąt, którego wierzchołkami są punkty, w których płaszczyzna sieczna przecina jego krawędzie, a jego bokami są odcinki krawędzi przecięcia się ścian wielościanu z płaszczyzną sieczną.

Podsumowując, aby znaleźć przekrój wielościanu płaszczyzną należy znaleźć położenie punktów przecięcia krawędzi wielościanu z płaszczyzną.

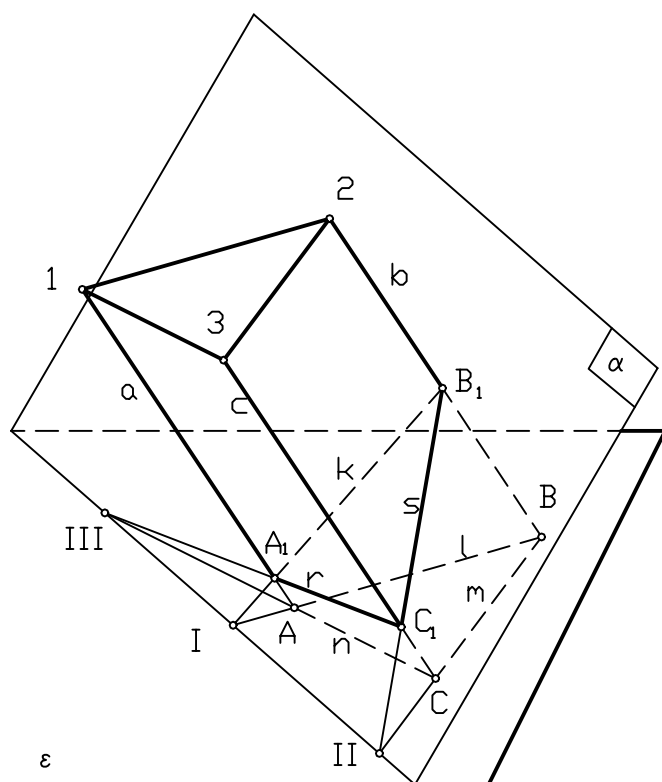
W przypadku charakterystycznie ustawionej były zadanie jest trywialne.



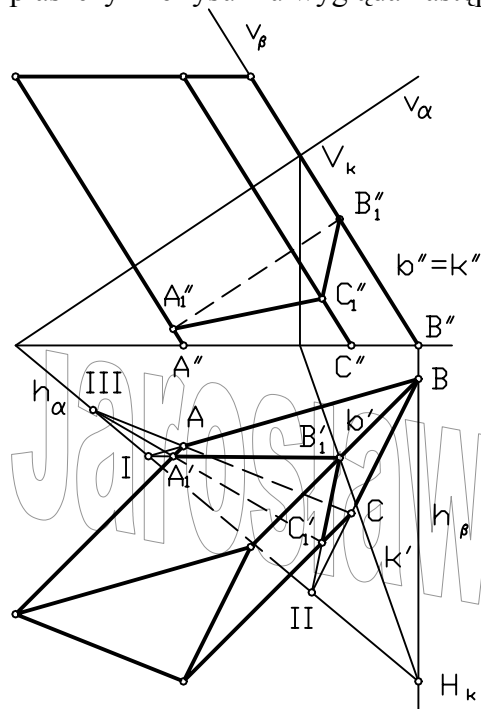
Podobnie sprawa ma się w sytuacji jeśli płaszczyzna jest charakterystyczna.



W ogólnym przypadku sytuacja jest już trochę bardziej skomplikowana, ale i tak rozwiązań jest kilka. Po pierwsze znajdziemy punkt przecięcia jednej z krawędzi z daną płaszczyzną a następnie wykorzystamy powinowactwo. Kto ma kłopot ze zrozumieniem powinowactwa może powtórzyć konstrukcję dla każdego dla pozostałych krawędzi. Poniżej zostanie zaprezentowany przekrój graniastosłupa płaszczyzną α .



Rysunek powyżej przedstawia ideę postępowania. Wykorzystując fakt, że graniastosłup stoi na płaszczyźnie ε przedłużamy boki podstawy (linie l, m, n) uzyskując punkty I, II, III. Jeśli znamy (lub wyznaczymy) punkt przecięcia dowolnej krawędzi graniastosłupa z płaszczyzną α , wówczas możemy skorzystać z powinowactwa. Przykładowo jeśli znamy położenie punktu C_1 możemy przeprowadzić przez ten punkt i punkt II prostą s (proste s i m leżą na jednej ścianie graniastosłupa i przecinają się w punkcie II). Dzięki prostej s wyznaczamy położenie punktu B_1 . Na końcu w tym przypadku mamy dwie możliwości. Aby znaleźć punkt A_1 wystarczy poprowadzić prostą $k(B_1, I)$ lub prostą $r(C_1, III)$. Rozwiązanie tego zadania na płaszczyźnie rysunku wygląda następująco:



Wyjaśnienia wymaga jak w tym wypadku wyznaczono pierwszy punkt przekroju. Zdecydowano się na wprowadzenie płaszczyzny β tworzonej przez prostą k (część wspólna płaszczyzn α i β) i b (prosta b wychodzi z punktu B i jest krawędzią graniastosłupa). Płaszczyzna β jest płaszczyzną pionowo-rzutującą. W rzucie poziomym przecięcie prostych b i k to szukany punkt.

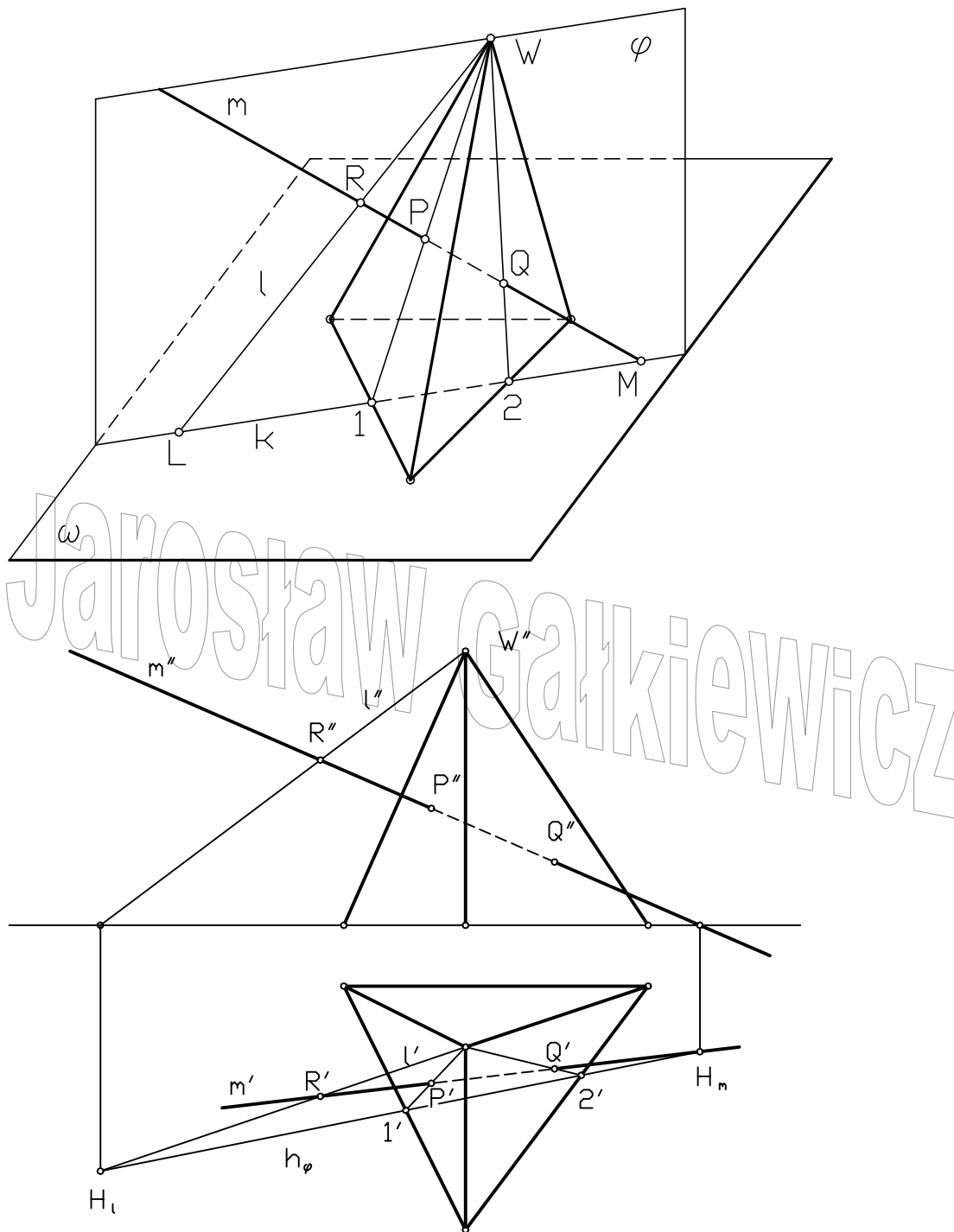
Punkty przebiecia

Aby znaleźć punkt przebiecia postępujemy podobnie jak w przypadku tradycyjnej KEW. Wystarczy znaleźć płaszczyznę, na której leży prosta przebijająca bryłę. Jeśli będziemy w stanie narysować krawędzie wspólne bryły i płaszczyzny punkty przebiecia praktycznie znajdą się same.

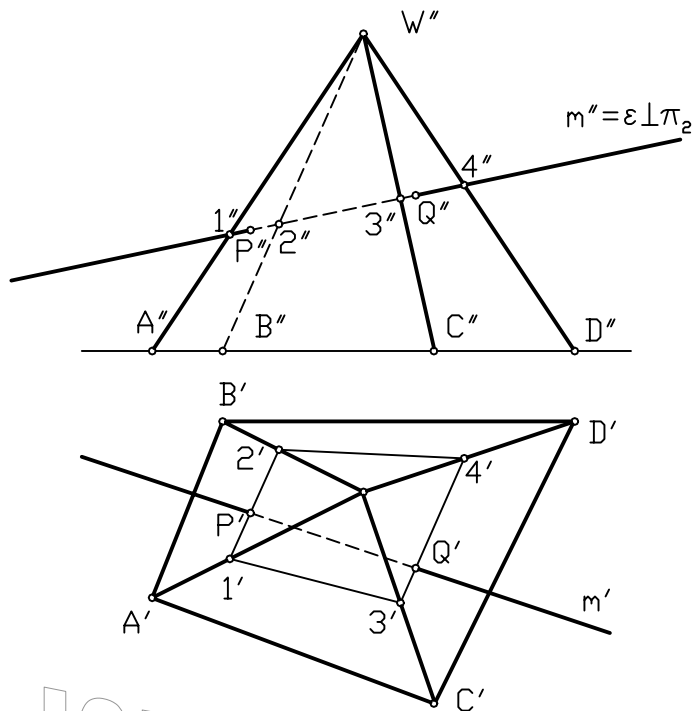
Poniżej pokazano rozwiązanie zadania polegającego na znalezieniu punktów przebiecia prostej m i ostrosłupa.

Rozwiązanie: aby wykonać zadanie wprowadzamy dodatkową płaszczyznę $\phi(m, l)$. Prosta l to prosta przechodząca przez wierzchołek ostrosłupa W i przecinająca prostą m w punkcie R. Dzięki punktowi R możemy znaleźć obraz prostej l w rzucie poziomym. Teraz znajdując punkty przebiecia prostych l i m z rzutnią poziomą możemy narysować ślad płaszczyzny h_ϕ . Ponieważ podstawa ostrosłupa i ślad leżą na poziomej rzutni więc muszą się przecinać w punktach 1 i 2. Jeśli przez wierzchołek i punkt 1 poprowadzimy prostą wówczas narysujemy krawędź przecięcia ostrosłupa płaszczyzną ϕ . Podobnie możemy postąpić z punktem 2.

Przecięcie tych krawędzi z linią m , która również leży na φ , wyznacza punkty przebiecia prostej m i ostrosłupa.



Przykład drugi polega również na znalezieniu punktów przebiecia prostej m i ostrosłupa. W tym wypadku zastosujemy standardowy sposób postępowania polegający na wprowadzeniu na jednej z rzutni płaszczyzny rzutującej (w tym przypadku pionowo-rzutującej) przechodzącej przez prostą m . Dzięki charakterystycznemu ustawieniu płaszczyzny bardzo łatwo znaleźć (w tym wypadku na rzutni pionowej) punkty jej przecięcia z krawędziami ostrosłupa. Wystarczy przenieść je na drugi rzut i odnaleźć punkty w których prosta m przecina się krawędziami przekroju.

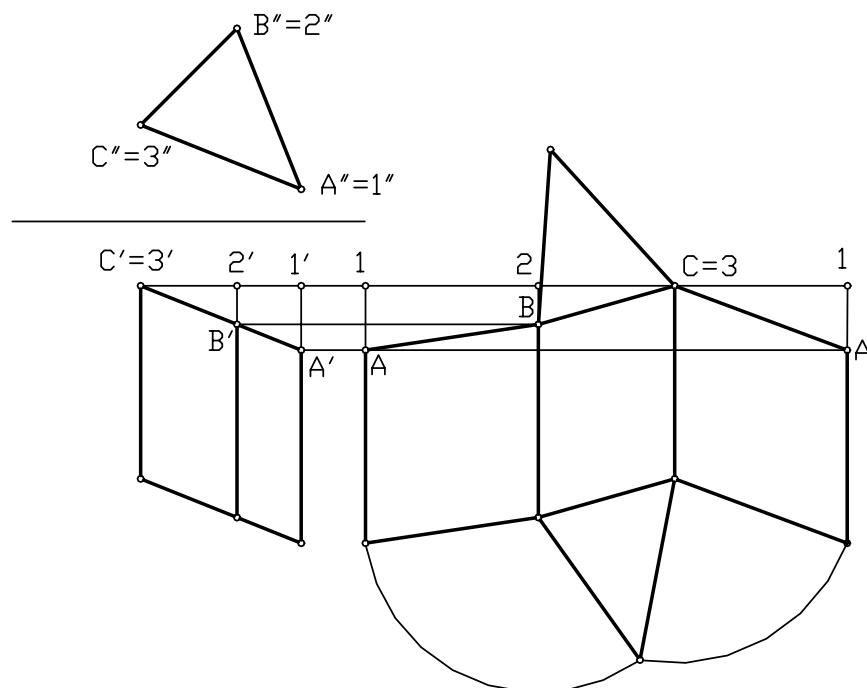


Rozwinięcia

Rozwinięciem wielościanu nazywamy zbiór wielokątów na płaszczyźnie rysunku, przystających do ścian wielościanu. Siatkę otrzymujemy przez rozcięcie niektórych krawędzi oraz obrót niektórych krawędzi na jedną płaszczyznę.

Poniżej prezentuje dwa przykłady rozwinięć wielościanów.

W pierwszym przypadku niektóre linie graniastosłupa są równoległe do rzutni π_1 dlatego znamy ich długość bez konieczności wykonywania kładu. Dla ułatwienia konstrukcji wprowadzono do konstrukcji trójkąt (1,2,3) który jest równoległy do rzutni π_2 . Dlatego długości poszczególnych jego odcinków znamy z rzutów na rzutnię pionową. Dalsze szczegóły konstrukcji przedstawia rysunek.



W drugim przypadku mamy do czynienia z ostrosłupem, którego krawędzie leżą w położeniach dowolnych. Rozwiązanie wykonano w oparciu o obracanie wokół wierzchołka poszczególnych krawędzi tak, aby uzyskać ich rzeczywiste długości. Alternatywnie można dokonać kładu poszczególnych ścianek (rozwiązanie linią kreskową pokazuje kład ścianki WAC).

