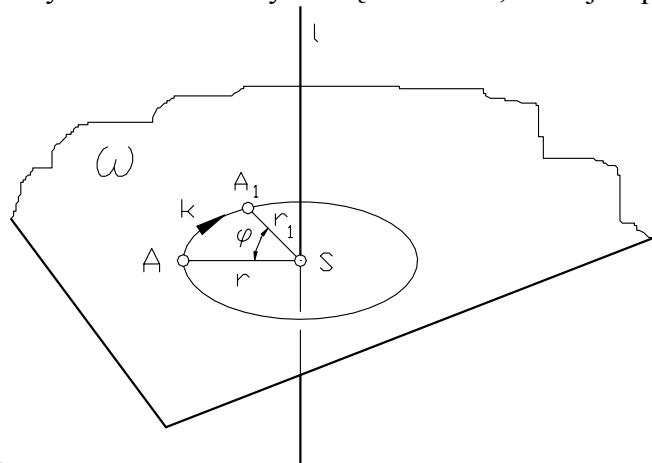


5. Obroty i kłady

Definicja obrotu: Obrotem punktu A dookoła prostej l nazywamy ruch punktu A po okręgu k zawartym w płaszczyźnie prostopadłej do prostej l w kierunku zgodnym lub przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Zwarzywszy na ograniczone możliwości przedstawiania takiego ruchu na płaszczyźnie zwykle ruch ten odbywa się wokół osi, która jest prostopadła do jednej z osi.



Definicja elementów obrotu:

punkt S – środek obrotu

prosta l – oś obrotu

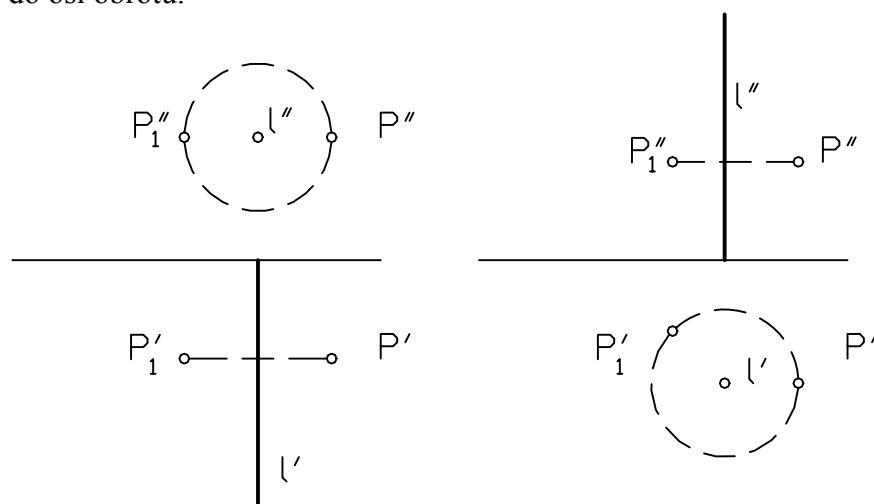
płaszczyzna ω – płaszczyzna obrotu

odcinek AS – promień obrotu

kąt φ – skierowany kąt obrotu

okrąg k to okrąg obrotu czyli tor poruszającego się punktu

Ponieważ oś obrotu jest linią poziomą lub pionową to punkty obracane wokół takiej linii w jednym rzucie poruszają się będą po okręgu zaś w drugim po linii prostej prostopadłej do osi obrotu.

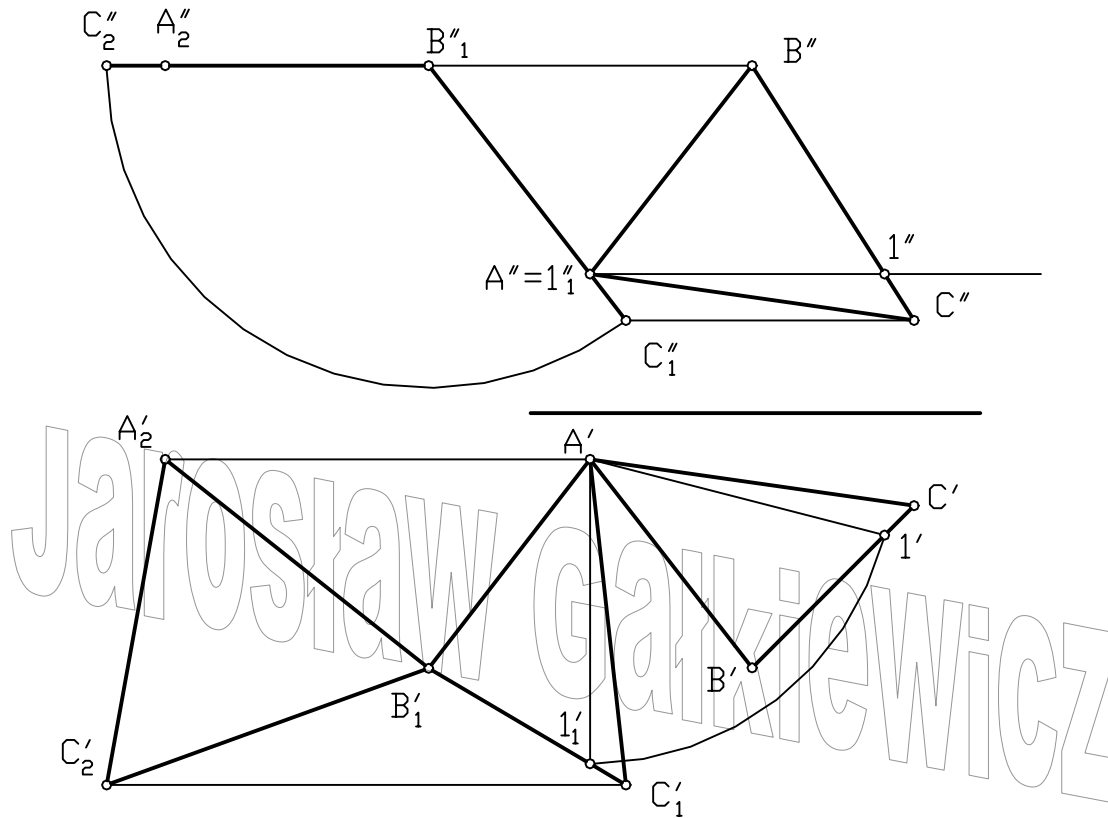


Przykładowe zadanie: wyznaczyć rzeczywistą wielkość trójkąta ABC.

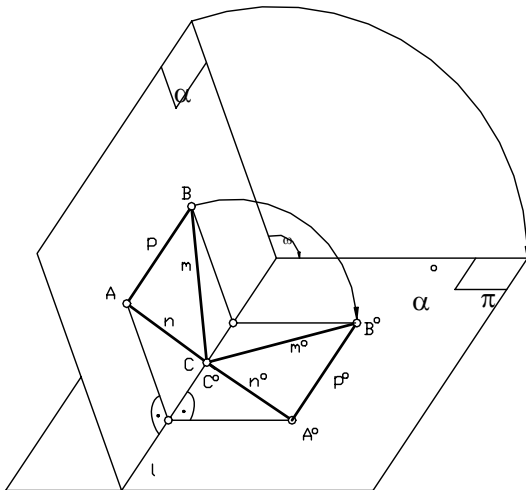
W pierwszym etapie wyznaczmy kąt jaki tworzy płaszczyzna trójkąta z rzutnią π_1 .

W punkcie A umieszczamy pionową oś obrotu. Z tego samego punktu kreślimy prostą poziomą do punktu 1. Znajdujemy rzut poziomy punktu 1. Na rzutni π_1 dokonujemy obrotu o taki kąt aby punkt 1 i A znalazły się na jednej linii pionowo-rzutującej. O ten sam kąt obracamy punkty B i C dokonując w ten sposób obrotu poziomego rzutu całego

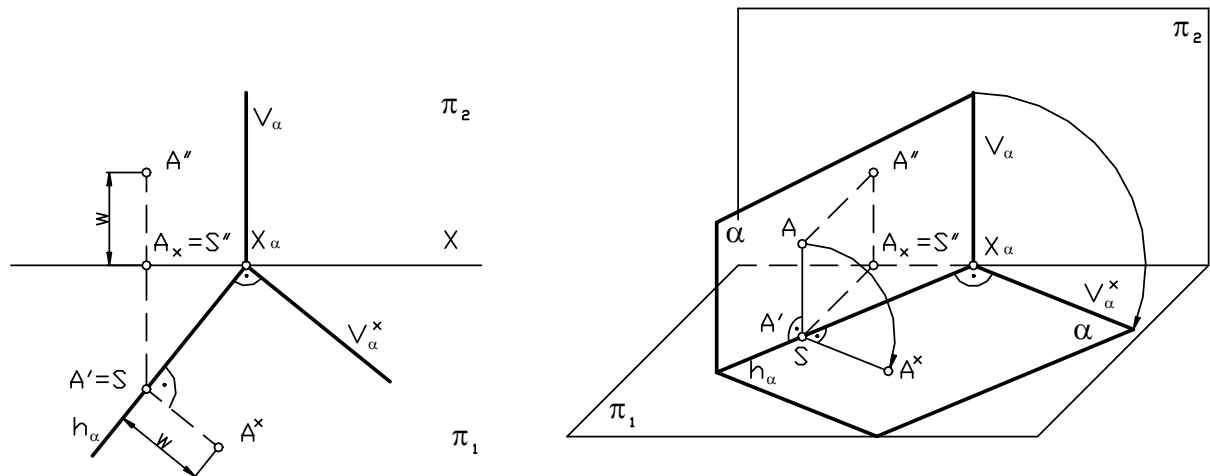
trójkąta. Na rzutni pionowej punkty B i C przemieszczają się wzdłuż odpowiednich linii poziomych. Okazuje się, że wszystkie punkty tworzące trójkąt leżą teraz na jednej linii. Wybieramy poziomą oś obrotu w punkcie B. Wokół tej osi na pionowej rzutni dokonujemy obrotu o taki kąt aby płaszczyzna trójkąta stała się płaszczyzną poziomą. Dzięki temu rzuty poziome wszystkich obiektów znajdujących się na niej (a więc i trójkąta) mają rzeczywistą wielkość.



Definicja kładu: kład to taki obrót płaszczyzny, który dokonujemy wokół osi l leżącej na jednej z rzutni (lub równoległej do rzutni) o taki kąt, że po dokonaniu obrotu płaszczyzna obracana jednoczy się z rzutnią (lub staje się równoległa do niej). Kładu dokonuje się aby określić rzeczywiste wymiary obiektów leżących na kładzonej płaszczyźnie i ich wzajemne relacje.

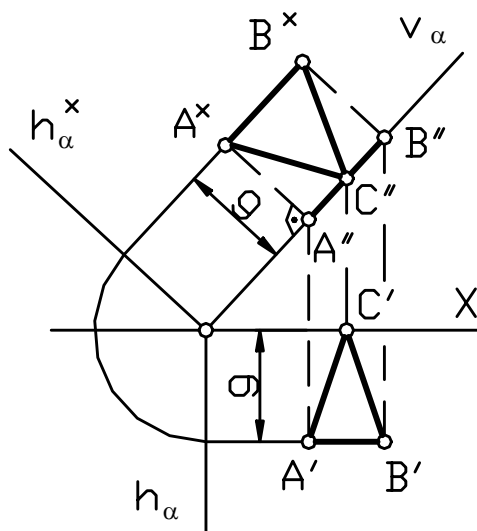


Podniesieniem z kładu nazywamy operację odwrotną, czyli taką w której płaszczyznę zjednoczoną z rzutnią obracamy o taki kąt aby wróciła do położenie pierwotnego. Konstrukcję tą wykonuje się aby odnaleźć rzuty obiektów leżących na płaszczyźnie. Dosyć łatwym zadaniem jest wykonanie rzutu płaszczyzny w położeniu charakterystycznym np. poziomo-rzutującej.



Przykład narysować trójkąt równoramienny na płaszczyźnie pionowo-rzutującej, którego wierzchołek leży na rzutni π_2 .

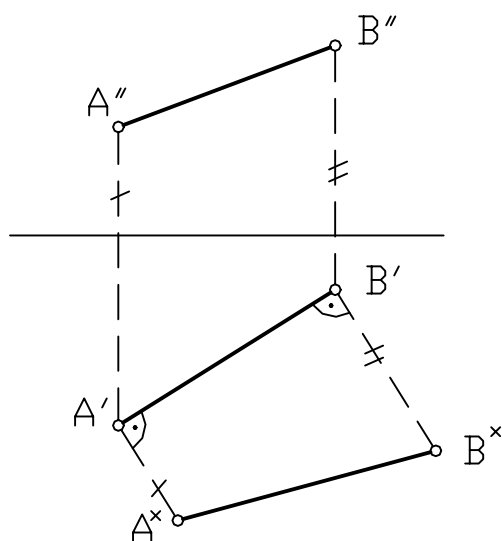
Pierwszą czynnością jest wykonanie kładu płaszczyzny przez obrócenie jej wokół śladu pionowego v_α . A położonej płaszczyźnie rysujemy trójkąt w nakazanej pozycji. Podniesie z kładu polega na znalezieniu rzutu pionowego, który w przypadku płaszczyzny pionowo-rzutującej jest odcinkiem, a następnie znalezieniu rzutu poziomego. Wszystkie punktu muszą leżeć na prostych odnoszących. Aby odnaleźć głębokość punktów A i B wykorzystano linię poziomą, która na kładzie płaszczyzny jest równoległa do osi obrotu (czyli śladu v_α) i leży w odległości g od niej, a w rzucie poziomym jest równoległa do osi X i również leży w odległości g od niej.



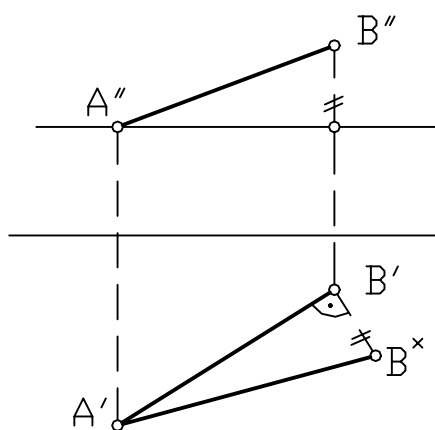
W przypadku odcinka powyższą technikę możemy wykorzystać na dwa sposoby. Stosując zwykły kład oraz tzw. kład różnicowy.

Zadanie: znaleźć rzeczywistą długość odcinka AB.

kład

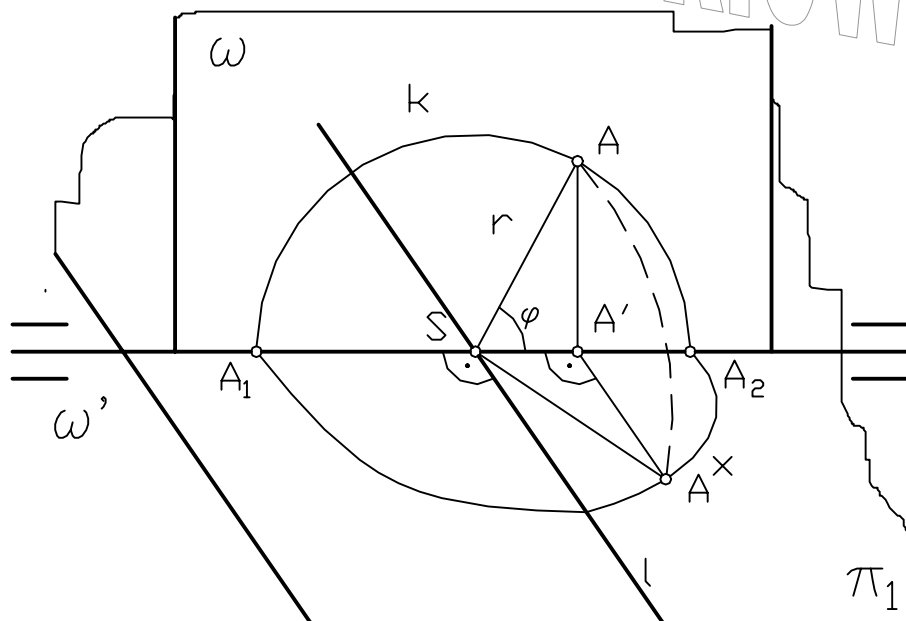


kład różnicowy

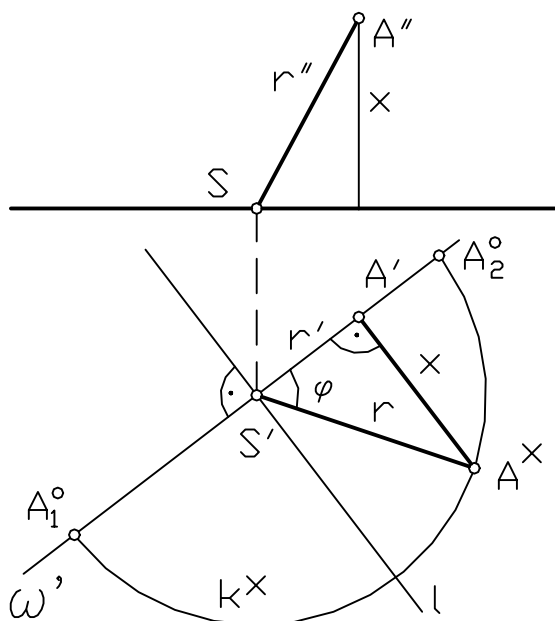


Na lewym rysunku zastosowano zwykły kład. Dokonano obrotu płaszczyzny poziomo-rzutu zawierającej odcinek AB. W przypadku rozwiązania po prawej zastosowano kład różnicowy. W umowny sposób przesunięto położenie płaszczyzny rzutującej do poziomu punktu A następnie dokonano obrotu. Ponieważ punkt A leży w płaszczyźnie więc obrotowi uległ tylko punkt B.

Kład płaszczyzny dowolnej jest dużo bardziej skomplikowany. Idee kładu dokonanego bez pomocy śladów pokazuje poniższy rysunek, który mimo wszystko przedstawia płaszczyznę rzutującą ω (dla ułatwienia prezentacji)



Rysunek ten na płaszczyźnie wygląda jak poniżej:



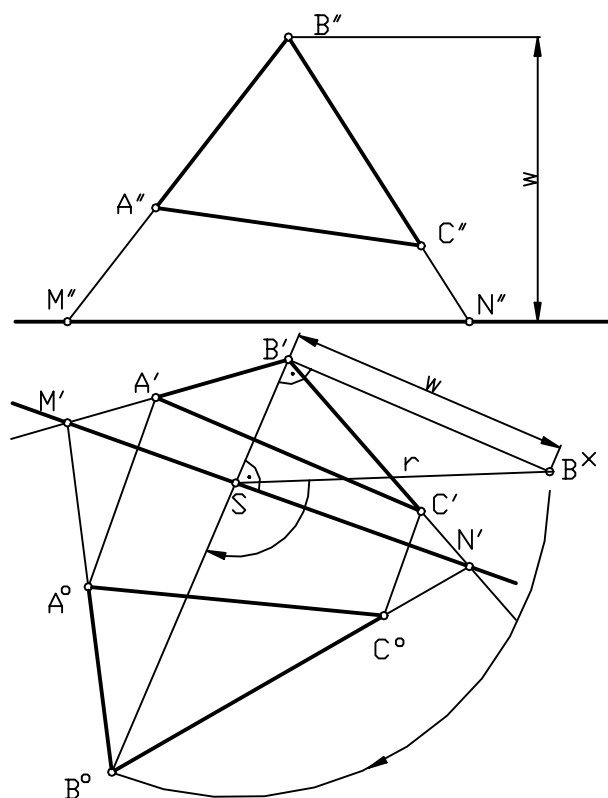
Technika wykonania kładu dowolnej płaszczyzny składa się z kilku kroków:

- * znalezienie osi obrotu, którą jest linia leżąca na jednej z rzutni (na rysunku to linia l)
- * znalezienie odległości kładzonego punktu od środka obrotu za pomocą zwykłego kładu odcinka (wiadomo, że obracany punkt będzie się poruszał po linii prostopadłej do osi obrotu, w tym wypadku jest to ślad płaszczyzny ω)

* położenie wybranego punktu leży na przecięciu okręgu o promieniu r równym odległości punktu od osi obrotu z linią prostopadłą do osi obrotu. Z opisu wynika, że rzut można wykonać w dwóch kierunkach do punktu A_1 lub A_2 .

Preferowany jest kierunek lewy tzn $180^\circ - \varphi$ (czyli do punktu A_1)

Zadanie: znaleźć rzeczywistą wielkość trójkąta ABC.



Przedłużając linie AB i AC do osi x_{12} tworzymy oś obrotu MN.

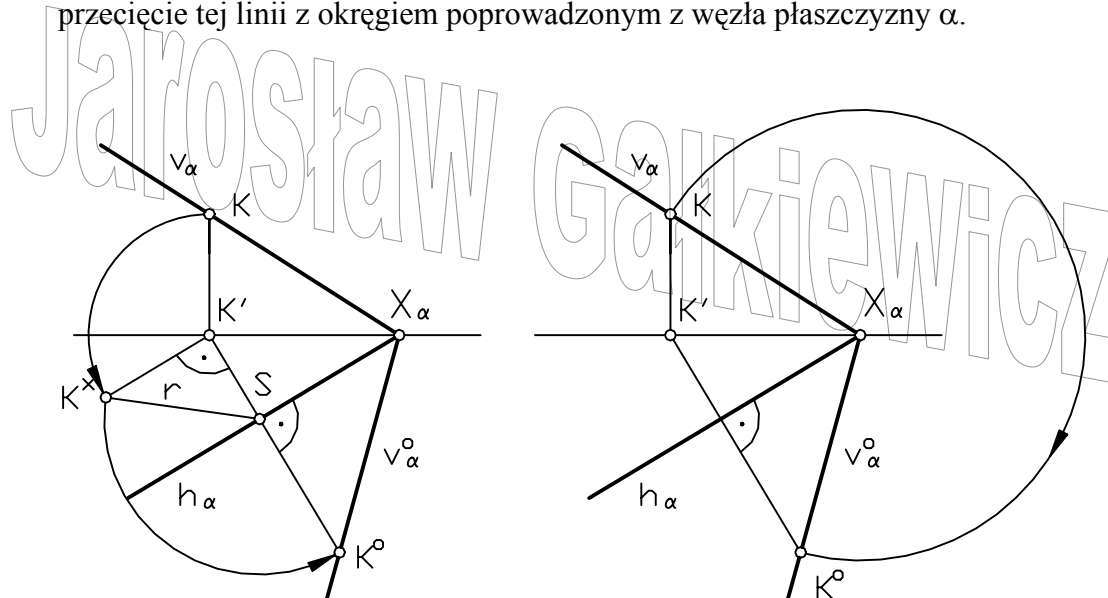
Przez punkt B' prowadzimy prostą prostą do osi obrotu MN ponieważ kład punktu obracanego wokół osi obrotu będzie leżał właśnie na tej linii. Środek obrotu punktu B leży na przecięciu tej linii z linią MN. Na rysunku oznaczony jest literą S.

Znajdujemy odległość punktu B od środka obrotu odkładając odległość w od płaszczyzny π_1 na linii równoległej do osi obrotu poprowadzonej z punktu B'. Uzyskujemy punkt B^x.

Z punktu S prowadzimy okrąg o promieniu r znajdując kład punktu B oznaczony B^o. Jeśli połączymy kład punktu B z punktami M i N, które leżąc na osi obrotu jednoczą się ze swoimi kładami nie będziemy musieli wykonywać kładu punktów A i B. Wystarczy z rzutów A' i C' poprowadzić linie prostokątne do osi obrotu aż nie przetną się z liniami B^oM' i B^oN'.

Inaczej i może nawet prościej wygląda kład płaszczyzny podanej za pomocą śladów.

Formalna konstrukcja wygląda jak na rysunku po lewej. Jedyna różnica między poprzednim sposobem polega na tym, że nie znajdujemy osi obrotu ponieważ ślad jest taką osią, dalej postępujemy tradycyjnie, chyba, że wykorzystamy dodatkowe zależności, a wtedy konstrukcja upraszcza się do rysunku po prawej. Wystarczy wybrać punkt na jednym ze śladów a następnie poprowadzić linię prostokątną do drugiego śladu i znaleźć przecięcie tej linii z okręgiem poprowadzonym z węzła płaszczyzny α .



Przykładowe zadanie polegające na znalezieniu rzeczywistej wielkości trójkąta ABC w tym wypadku wygląda następująco.

Wystarczy wykonać kład płaszczyzny według powyższego schematu a następnie wykorzystując właściwości w tym wypadku poziomych linii leżących na płaszczyźnie odnaleźć kład trójkąta ABC.

