

Oznaczenia

A, B, ... 1, 2, ... I, II, ... punkty

a, b, ... proste

$\alpha, \beta, \dots$ płaszczyzny

$\pi_1, \pi_2, \dots$ rzutnie

k kierunek rzutowania

$d(A, m)$ odległość punktu od prostej

$m(A, B)$ prosta przechodząca przez punkty A i B

$\alpha(1, 2, 3)$ płaszczyzna przechodząca przez punkty 1, 2, 3

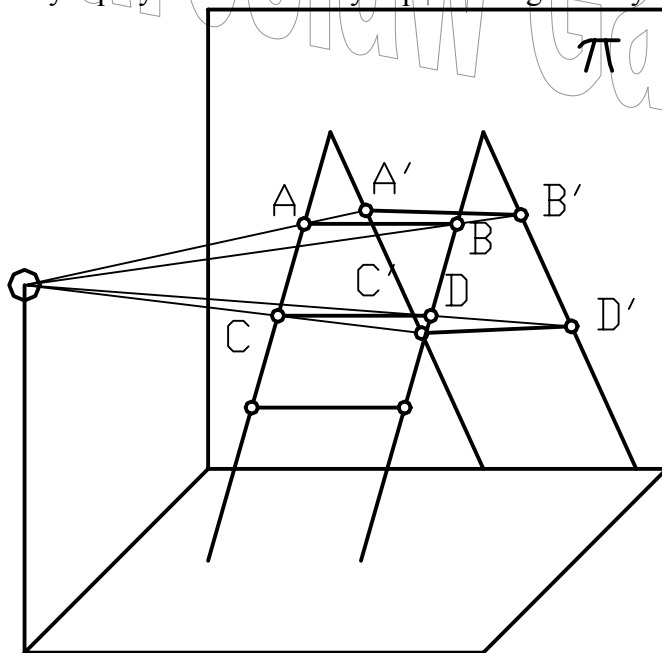
Rodzaje rzutowania

Zawsze, gdy chcemy odtworzyć obraz jakiegoś trójwymiarowego przedmiotu na płaszczyźnie potrzebujemy aparatu rzutowania. Aparat rzutowania składa się z dwóch elementów rzutni na której powstanie obraz i linii rzutujących. Miejsca gdzie linie rzutujące przechodzące przez rzutowany obiekt docierają do rzutni tworzą się obraz który nazywamy rzutem.

$$R(A) = A' = a \cap \pi$$

Rzut środkowy

W przypadku rzutu środkowego wszystkie linie rzutujące wychodzą z jednego punktu. Przykładem rzutu środkowego może być cień drabiny na ścianie rzucany pod wpływem światła żarówki. Każdy z rzutowanych punktów należy połączyć linią ze źródłem światła, a w miejscu gdzie taka przedłużona linia uderzy w ścianę otrzymamy obraz czyli rzut punktu. Innym przykładem może być aparat fotograficzny.

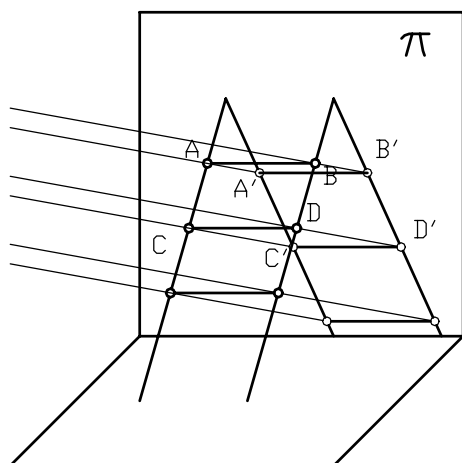


Rzut równoległy

Dla nas dużo ważniejszym sposobem rzutowania jest rzut równoległy. W tym przypadku rzutowania wszystkie linie rzutujące, które przechodzą przez rzutowany obiekt są równoległe do kierunku rzutowania (a więc i do siebie). Rzutem równoległym punktu A na rzutnię π nazywamy punkt A' który leży na prostej a równoległej do kierunku rzutowania.

$$R(A) = A' = a \cap \pi$$

$$A \in a \parallel k \wedge a \cap \pi = A'$$



Ze względu na kąt jaki tworzy kierunek rzutowania z rzutnią rzut równoległy możemy nazywać rzutem ukośnym jeśli kierunek rzutowania nie jest prostopadły do rzutni oraz rzut prostokątnym.

Niezmienniki rzutowania równoległego

- Każdemu punktowi P w przestrzeni przyporządkowany jest na rzutni π jeden i tylko jeden punkt
- Nie jest prawdziwe twierdzenie odwrotne bo obraz na rzutni może odpowiadać dowolnemu punktowi na linii równoległej do kierunku rzutowania
- Rzutem równoległym figury e jest figura e' będąca zbiorem rzutów równoległych wszystkich punktów figury e
- Rzutem równoległym prostej jest prosta lub punkt
- Prosta równoległa do rzutni jest równoległa do swojego rzutu
- Stosunek długości dwóch odcinków równoległych nie leżących na prostych rzutujących nie zmienia się
- Stosunek podziału odcinka nie równoległego do kierunku rzutowania jest stały
- Obrazem płaszczyzny jest płaszczyzna lub prosta
- Rzut punktu należącego do zbioru należy do rzutu zbioru
- Rzuty prostych równoległych są do siebie równoległe
- Kąt prosty pozostaje kątem prostym jeżeli jedno z ramion jest równoległe do rzutni a drugie nie jest prostą rzutującą

Założenia metody Monge'a

Budowa układu.

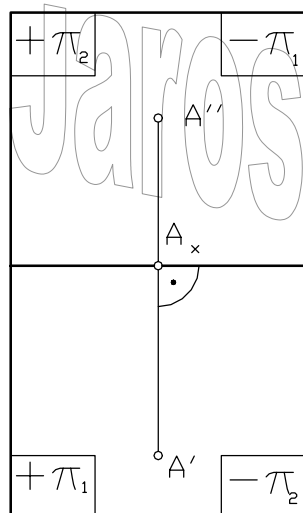
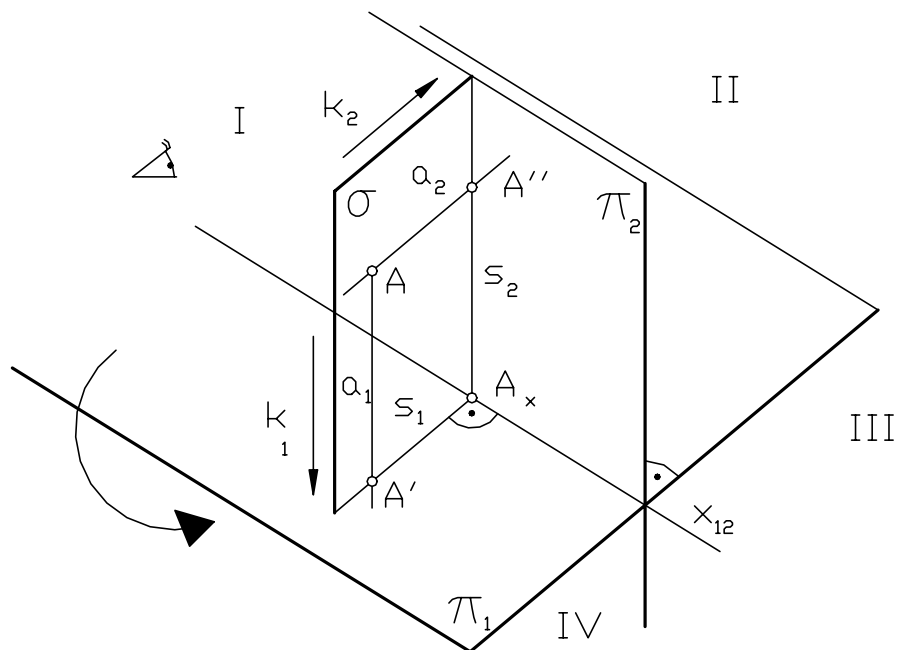
Układ składa się z dwóch prostopadłych do siebie rzutni: poziomej (pierwszej) π_1 i pionowej (drugiej) π_2 . Wspólna krawędź tych rzutni oznaczona jest symbolem x_{12} i nazywa się osią rzutów.

$$\pi_1 \perp \pi_2 \quad \pi_1 \cap \pi_2 = x_{12}$$

Każda rzutnia ma własny, prostopadły do niej kierunek rzutowania:

$$k_1 \perp \pi_1 \quad k_2 \perp \pi_2$$

Metoda Monge'a jest złożeniem dwóch prostokątnych rzutów.



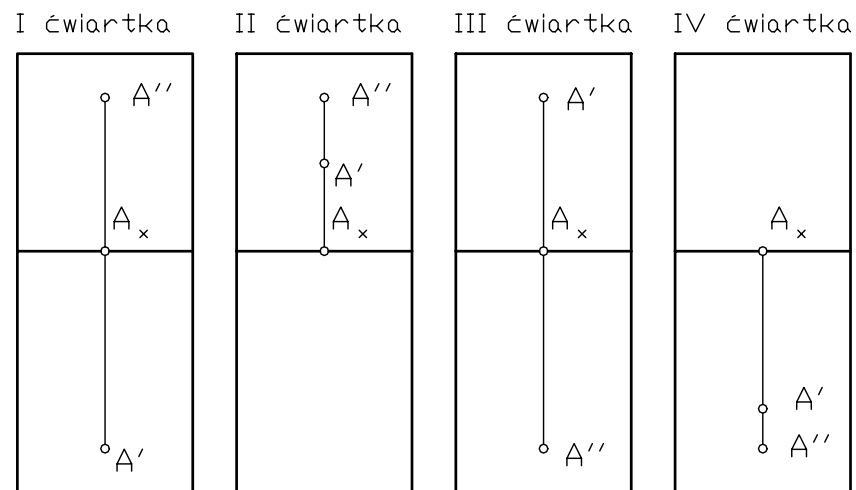
rzut pionowy

rzut poziomy

Co należy zauważyć

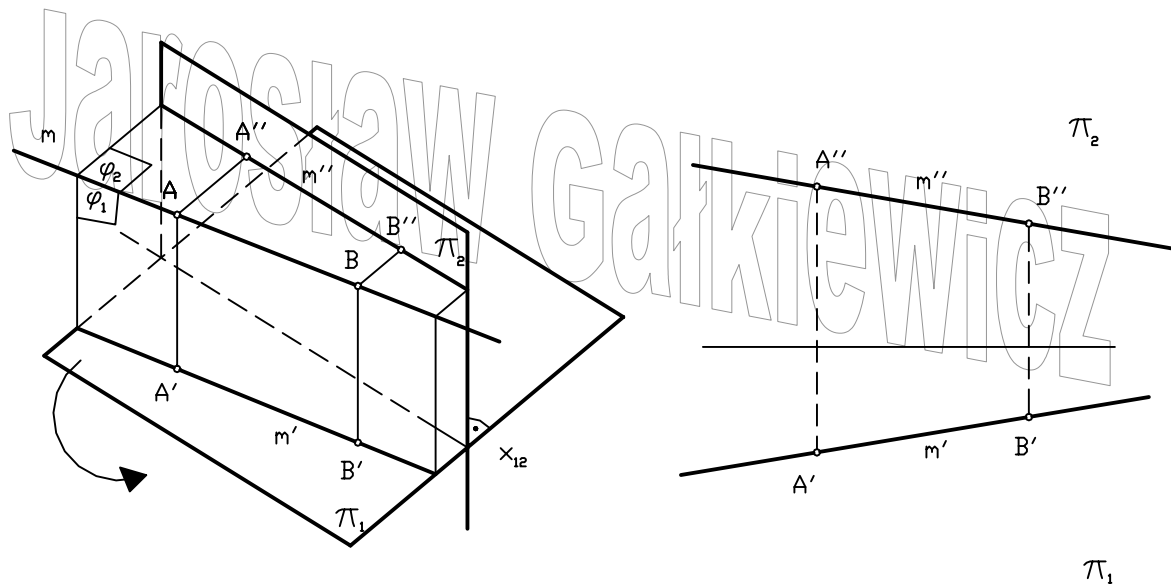
- Rzuty punktu leżą na jednej prostej $\perp$ do osi rzutów x_{12} , którą nazywamy prostą odnoszącą
- Wysokość punktu jest odległością rzutu pionowego od osi x
- Głębokość punktu jest odległością rzutu poziomego od osi x

Przykłady odwzorowania rzutów punktów leżących w różnych ćwiartkach

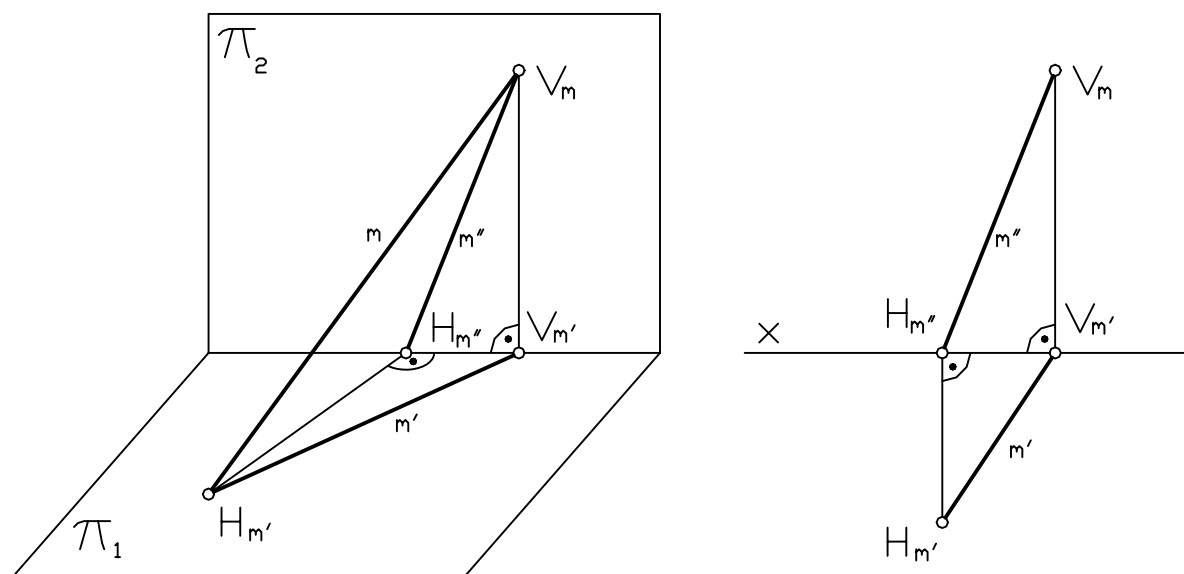


Przykłady odwzorowania prostej

Jeśli przez prostą poprowadzimy dwie płaszczyzny rzutujące prostopadłe do rzutni π_1 i π_2 to krawędzie przecięcia odpowiednich płaszczyzn z rzutami dają rzuty prostej.

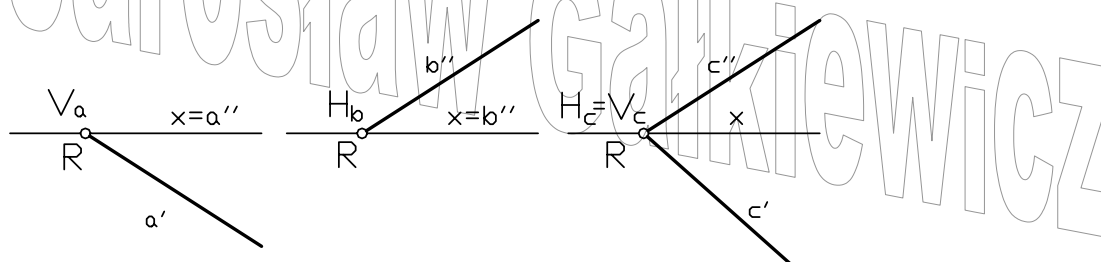


Punkt przecięcia prostej z płaszczyzną rzutującą tworzy punkt, który nazywamy śladem prostej. Jeżeli znamy położenie śladów prostej to jesteśmy w stanie wyznaczyć położenie rzutów prostej.

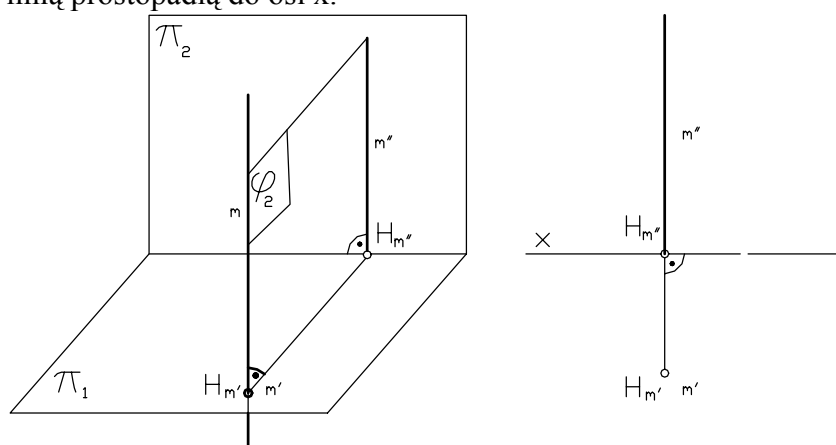


Proste w położeniach szczególnych

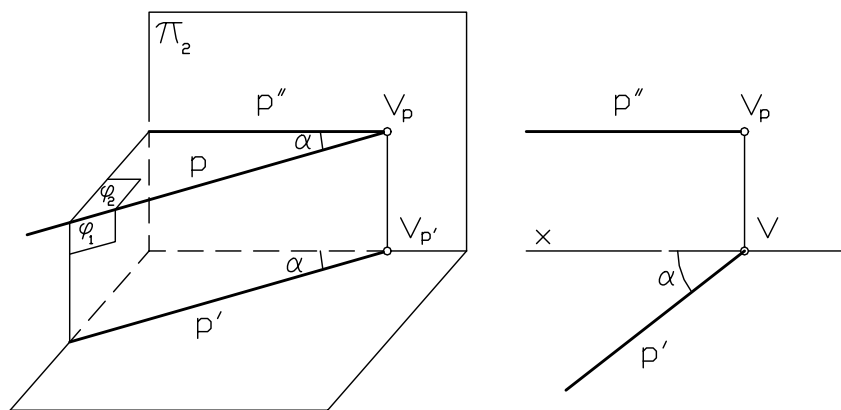
Jeżeli prosta leży na jednej z rzutni wówczas drugi rzut jednoczy się z osią rzutów x i na osi x leży ślad prostej (proste a i b). Jeżeli prosta przecina oś x , ale nie leży na żadnej z rzutni wówczas rzuty prostej przecinają się w jednym punkcie leżącym na osi x będącym jednocześnie „podwójnym śladem” (prosta c).



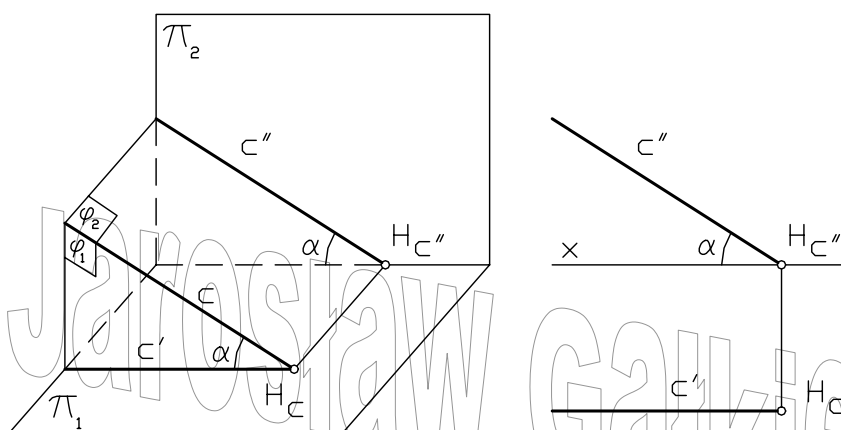
Jeśli prosta jest prostą rzutującą to jeden z jej rzutów redukuje się do punktu a drugi rzut jest linią prostopadłą do osi x .



Prosta pozioma to prosta równoległa do rzutni π_1

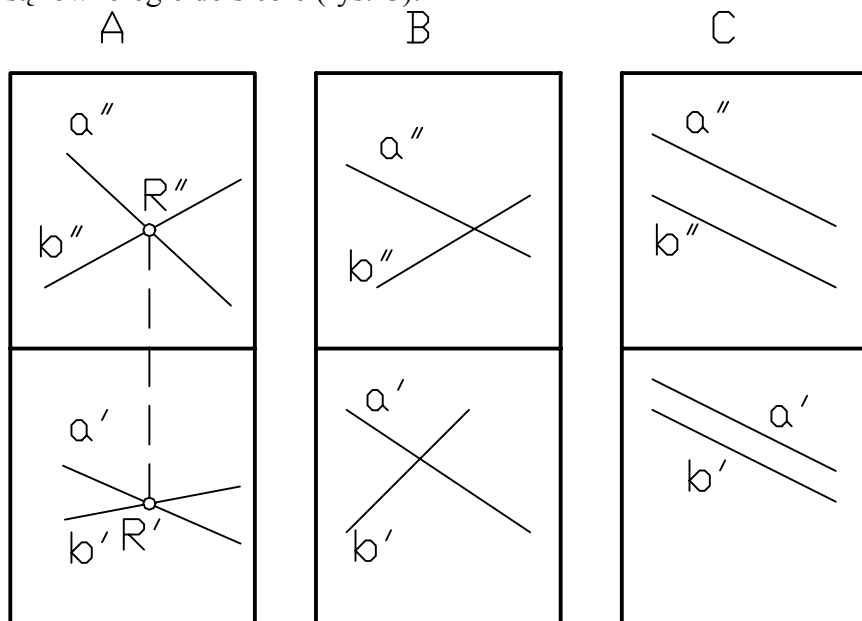


Prosta czołowa to prosta równoległa do rzutni π_2



Wzajemne położenie prostych w przestrzeni

Dwie proste mogą przecinać się wówczas powstaje punkt leżący na jednej prostej odnoszącej (rys. A). Dwie proste mogą tylko wyglądać na przecinające się, jeśli punkt przecięcia nie da się połączyć prostą odnoszącą oznacza to, że tak naprawdę proste te nie przecinają się (rys. B). Takie proste nazywamy skośnymi. Jeżeli dwie proste są równoległe do siebie to ich rzuty są równoległe do siebie (rys. C).

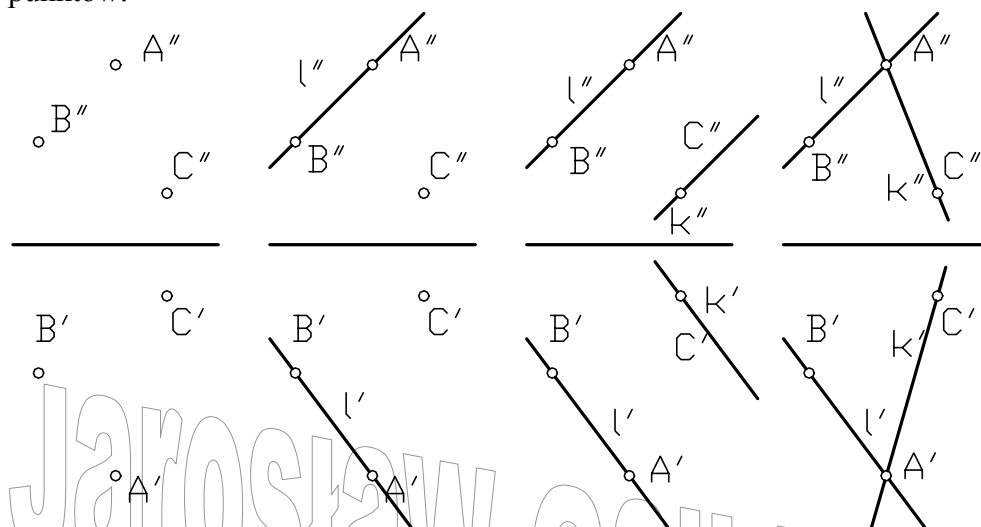


Obraz płaszczyzny

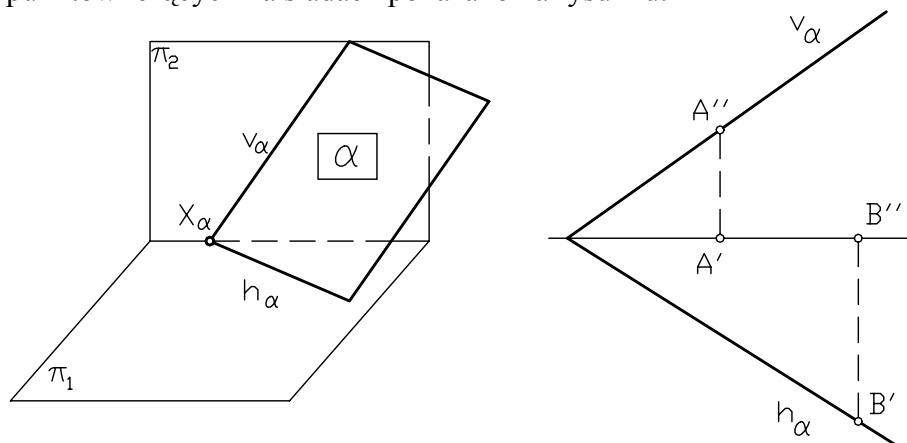
Aby określić położenie płaszczyzny musimy znaleźć rzuty elementów które jednoznacznie określają płaszczyznę. Płaszczyznę określają:

- trzy punkty
- prosta i punkt nie leżący na niej
- dwie proste równoległe
- dwie proste przecinające się

Jeśli się jednak dobrze zastanowić to okaże się, że wszystko się sprowadza do trzech punktów.

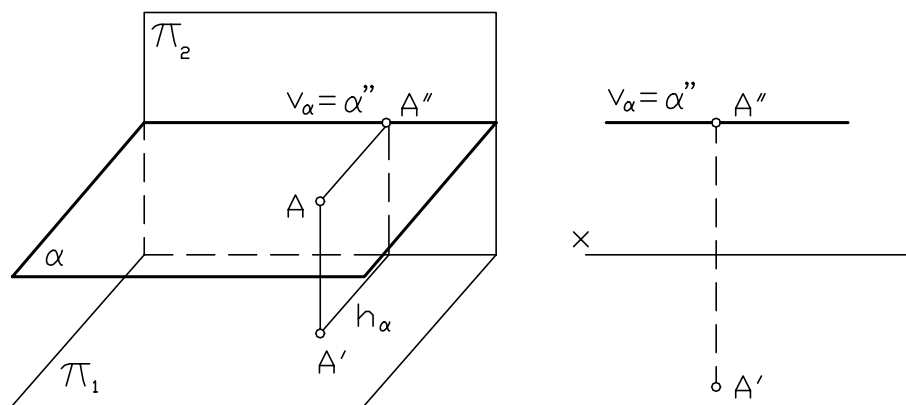


Płaszczyzna przecina rzutnię wzdłuż linii które nazywamy śladami płaszczyzny. Przecięcie płaszczyzny z rzutnią poziomą oznacza się literą h , natomiast przecięcie z rzutnią pionową literą v . Linie te wykorzystywane są w metodzie śladowej. Często dla poprawienia czytelności rysunku rysujemy tylko fragmenty śladów leżące w I ćwiartce (oczywiście poza zadaniami wymagającymi innej konstrukcji) oraz nie rysujemy ich drugiego rzutu. Gdyby potraktować ślady formalnie jako linie wówczas ich uzupełniające rzuty pokryłyby się z osią x_{12} a więc i tak nic nowego na rysunku się nie pojawi. Inaczej będzie z punktami. Obrazy punktów leżących na śladach pokazano na rysunku.



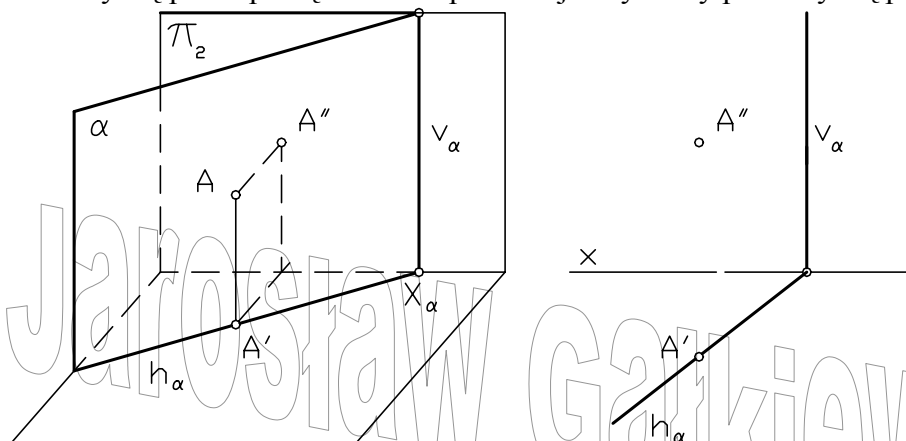
Płaszczyzny w położeniach charakterystycznych

Płaszczyznę równoległą do rzutni poziomej nazywamy płaszczyzną poziomą.



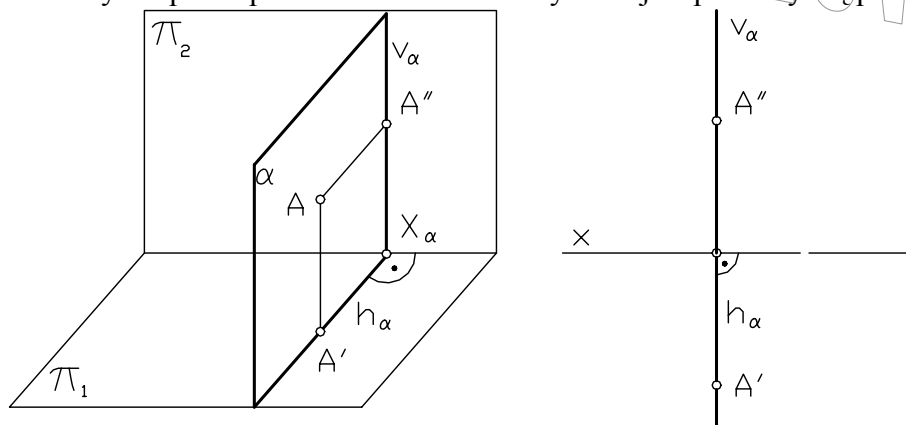
Analogicznie ma się sprawa z płaszczyzną pionową.

Płaszczyznę prostopadłą do rzutni poziomej nazywamy płaszczyzną poziomo-rzutującą.



I oczywiście podobnie jest z płaszczyzną pionowo-rzutującą.

Płaszczyzna prostopadła do obu rzutni nazywana jest płaszczyzną podwójnie-rzutującą.



Jak widać z przytoczonych przykładów płaszczyzna pozioma i pionowa mają tylko jeden ślad. Miejscem, gdzie ślad poziomy i pionowy łączą się nazywamy węzłem.